

Vierdimensionale Archimedische Polytope

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Marco Möller
aus Hamburg

Hamburg
2004

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Alexander Kreuzer
und Prof. Dr. Rolfdieter Frank

Hamburg, den 12.07.2004

Prof. Dr. Alexander Kreuzer
Dekan des Fachbereichs Mathematik

für Steffi

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Historisches	1
1.2	Definitionen	3
2	Beweisidee	7
3	Die Keilwinkel	11
3.1	Zellen mit drei Flächen pro Ecke	11
3.2	Auf Ecken mit drei Flächen zurückführbare Zellen	14
3.3	Antiprismen	14
3.4	Ausnahmen	17
3.4.1	Der schräge Hexaeder	18
3.4.2	Der schräge Dodekaeder	20
3.5	Zusammenfassung	23
4	Radien der Polyeder	29
5	Faltwinkel und Radien im Polychor	35
5.1	Drei Polyeder an der Kante	36
5.2	Vier Polyeder an der Kante	38
5.3	Fünf Polyeder an der Kante	39
6	Die möglichen Kantenumgebungen	43
6.1	Die Zusammenfassung des Kombinationsprogramms	43
6.2	Ergebnis des Programms	45
7	Elimination unmöglicher Kantenumgebungen	49
7.1	Vorüberlegungen	49
7.2	Einzelbetrachtung des Rests	51
7.2.1	Radius ≈ 0.63246	52
7.2.2	Radius ≈ 0.70711	53
7.2.3	Radius ≈ 0.77460	54

7.2.4	Radius ≈ 0.79057	54
7.2.5	Radius ≈ 0.86603	54
7.2.6	Radius ≈ 0.87947	55
7.2.7	Radius ≈ 0.96269	55
7.2.8	Radius ≈ 1.00000	55
7.2.9	Radius ≈ 1.03187	57
7.2.10	Radius ≈ 1.07448	58
7.2.11	Radius ≈ 1.11803	58
7.2.12	Radius ≈ 1.18322	59
7.2.13	Radius ≈ 1.19709	59
7.2.14	Radius ≈ 1.22474	59
7.2.15	Radius ≈ 1.26491	60
7.2.16	Radius ≈ 1.27475	60
7.2.17	Radius ≈ 1.32749	60
7.2.18	Radius ≈ 1.41421	60
7.2.19	Radius ≈ 1.43372	61
7.2.20	Radius ≈ 1.44701	61
7.2.21	Radius ≈ 1.46360	61
7.2.22	Radius ≈ 1.47492	62
7.2.23	Radius ≈ 1.48563	62
7.2.24	Radius ≈ 1.48779	64
7.2.25	Radius ≈ 1.58114	64
7.2.26	Radius ≈ 1.58289	65
7.2.27	Radius ≈ 1.60397	65
7.2.28	Radius ≈ 1.61245	65
7.2.29	Radius ≈ 1.61803	66
7.2.30	Radius ≈ 1.65831	74
7.2.31	Radius ≈ 1.69353	74
7.2.32	Radius ≈ 1.73205	75
7.2.33	Radius ≈ 1.74756	75
7.2.34	Radius ≈ 1.75142	75
7.2.35	Radius ≈ 1.84391	75
7.2.36	Radius ≈ 1.84776	76
7.2.37	Radius ≈ 1.89364	78
7.2.38	Radius ≈ 2.04168	78
7.2.39	Radius ≈ 2.12132	78
7.2.40	Radius ≈ 2.14973	78
7.2.41	Radius ≈ 2.19128	78
7.2.42	Radius ≈ 2.21306	78
7.2.43	Radius ≈ 2.22736	79
7.2.44	Radius ≈ 2.23607	79

7.2.45	Radius ≈ 2.28825	79
7.2.46	Radius ≈ 2.34214	80
7.2.47	Radius ≈ 2.37093	80
7.2.48	Radius ≈ 2.49721	81
7.2.49	Radius ≈ 2.52796	82
7.2.50	Radius ≈ 2.61313	82
7.2.51	Radius ≈ 2.64575	83
7.2.52	Radius ≈ 3.00592	83
7.2.53	Radius ≈ 3.01125	83
7.2.54	Radius ≈ 3.07768	83
7.2.55	Radius ≈ 3.41421	84
7.2.56	Radius ≈ 3.49895	85
7.2.57	Radius ≈ 3.68137	85
7.2.58	Radius ≈ 3.83513	85
7.2.59	Radius ≈ 4.29945	86
7.2.60	Radius ≈ 4.53457	86
7.2.61	Radius ≈ 4.64352	86
7.2.62	Radius ≈ 5.16991	87
7.2.63	Radius ≈ 5.23607	88
7.2.64	Radius ≈ 6.07359	89
7.2.65	Radius ≈ 6.73503	89
7.2.66	Radius ≈ 7.57963	90
7.2.67	Radius ≈ 8.21833	90
7.2.68	Radius ≈ 8.27895	90
7.2.69	Radius ≈ 9.12410	90
7.2.70	Radius ≈ 9.74461	91
7.2.71	Radius ≈ 11.25211	91
7.2.72	Radius ≈ 12.78665	91
7.3	Zusammenfassung der möglichen uniformen Polychora	92
8	Angabe der uniformen Polychora	97
8.1	Die regelmäßigen Polychora	97
8.2	Expansion und Kontraktion	98
8.3	Prismatisches Hochziehen	103
8.4	Erzeugung der Biprismachora	105
8.5	Coxeters schräger 24-Zeller	107
8.6	Conway und Guys „Großes Antiprismachor“	109
8.7	Zusammenfassung	113

9 Die Archimedischen Polychora	115
9.1 Abschluss	115
9.2 Eckenumgebungen der Platonischen Polychora	116
9.3 Eckenumgebungen der Prismachora	117
9.4 Eckenumgebungen der Archimedischen Polychora	119
9.5 Noch offene Fragen	123
A Tabellen	127
A.1 Tabelle 1	127
A.2 Tabelle 2	139
B Computerunterstützte Berechnungen	153
B.1 Berechnung des schrägen Dodekaeders	153
B.2 Radien-Programm	156
B.3 Kombinationsprogramm	167
C Ergänzungen zum Beweis	173
C.1 Fehlerabschätzung	173
C.1.1 Berechnungen in Kapitel 3	173
C.1.2 Berechnungen in Kapitel 4	174
C.1.3 Berechnungen in Kapitel 5	174
C.1.4 Berechnungen in Kapitel 6	174
C.1.5 Analyse der Tabellen und Gruppeneinteilung	175
C.2 Faltwinkel gleich Keilwinkel im Schnitt	175
C.3 Eindeutigkeit bei vier oder fünf Zellen pro Kante	176
C.4 Umgebungen mit p -(Anti-)Prismen und $p > 14$	178
C.4.1 Die kombinatorisch möglichen Kantenumgebungen mit $p > 14$	178
C.4.2 Die Kantenumgebung 1	181
C.4.3 Die Kantenumgebung 2	182
C.4.4 Die Kantenumgebungen 3 bis 10	182
C.4.5 Die Kantenumgebung 11	182
C.4.6 Die Kantenumgebungen 12 bis 16	183
C.4.7 Die Kantenumgebung 17	183
C.4.8 Die Kantenumgebungen 18 bis 26	183
C.4.9 Die Kantenumgebung 27	183
C.4.10 Die Kantenumgebungen 28 bis 52	183
C.4.11 Die Kantenumgebung 53	183
C.4.12 Die Kantenumgebung 54	184
C.4.13 Die Kantenumgebungen 55 , 56 und 57	184
C.4.14 Die Kantenumgebung 58	185

C.4.15 Die Kantenumgebungen 59 , 60 und 61	185
C.4.16 Die Kantenumgebung 62	185
C.4.17 Die Kantenumgebung 63	186
C.4.18 Die Kantenumgebung 64	186
C.4.19 Die Kantenumgebung 65	186
C.4.20 Die Kantenumgebungen 66 bis 76	187
C.4.21 Die Kantenumgebung 77	187
C.4.22 Die Kantenumgebung 78	188
C.4.23 Die Kantenumgebung 79	188
C.4.24 Die Kantenumgebung 80	188
C.4.25 Die Kantenumgebung 81	188
C.4.26 Die Kantenumgebung 82	189
C.4.27 Die Kantenumgebung 83	190
C.4.28 Die Kantenumgebung 84	190
C.4.29 Die Kantenumgebung 85	191
C.4.30 Die Kantenumgebung 86	191
C.4.31 Die Kantenumgebung 87	191
C.4.32 Die Kantenumgebung 88	192
C.4.33 Die Kantenumgebung 89	192
C.4.34 Zusammenfassung	192
D Hilfen bei der Visualisierung	193
D.1 Abwicklungen	193
D.2 Projektionen	195
E Sonstiges	199
E.1 Umformungen von Seite 16	199
E.2 Abkürzungen	202
E.3 Griechische und römische Zahlen	203
Zusammenfassung	211
Lebenslauf des Autors	213

Abbildungsverzeichnis

Abwicklung des 24-Zellers	6
Abwicklung des 5-Zellers	9
Abwicklung des 8-Zellers	9
Gemälde von Dalí: Christus Hypercubus	10
Die Platonischen Polyeder	25
Die Archimedischen Polyeder	26
Die Prismen	27
Die Antiprismen	27
Abwicklung des 120-Zellers	28
Abwicklung des 16-Zellers	33
Abwicklung des 600-Zellers	34
Zentralprojektion des 5-Zellers	41
Zentralprojektion des 8-Zellers	42
Zentralprojektion des 16-Zellers	42
Zentralprojektion des 24-Zellers	46
Zentralprojektion des 120-Zellers	47
Zentralprojektion des 600-Zellers	48
Teilabwicklung des 5-antiprismatischen Prismachors	96
Teilabwicklung des 7-antiprismatischen Prismachors	96
Teilabwicklung des 10-antiprismatischen Prismachors	96
Abwicklung des 4,5-Biprismachors	96
Abwicklung des 5,6-Biprismachors	96
Abwicklung des 8,10-Biprismachors	96
Abwicklung des 5,4-Biprismachors	96
Abwicklung des 6,5-Biprismachors	96
Abwicklung des 10,8-Biprismachors	96

Eckenumgebungen der Platonischen Polychora	116
Eckenumgebungen der Prismachora	117
Eckenumgebungen der Archimedischen Polychora	119
• <i>Rectified 5-cell</i>	120
• <i>Runcinated 5-cell</i>	120
• <i>Cantellated 5-cell</i>	120
• <i>Rectified 8-cell</i>	120
• stumpfer 5-Zeller	120
• stumpf-tetraedrisches Dekachor	120
• <i>Runcinated 8-cell</i>	120
• stumpfer 16-Zeller	120
• <i>Runcitruncated 5-cell</i>	120
• schräger 24-Zeller	120
• großes Antiprismachor	120
• <i>Rectified 24-cell</i>	120
• <i>Cantitruncated 5-cell</i>	120
• <i>Cantellated 8-cell</i>	120
• <i>Runcinated 24-cell</i>	120
• <i>Runcicantic 8-cell</i>	120
• stumpfer 8-Zeller	120
• <i>Omnitruncated 5-cell</i>	120
• <i>Runcitruncated 16-cell</i>	121
• <i>Cantellated 24-cell</i>	121
• <i>Runcitruncated 8-cell</i>	121
• stumpfer 24-Zeller	121
• <i>Cantitruncated 8-cell</i>	121
• <i>Rectified 600-cell</i>	121
• stumpf-hexaedrisches Tetrakontaoktachor	121
• <i>Runcitruncated 24-cell</i>	121
• <i>Rectified 8-cell</i>	121
• <i>Cantitruncated 24-cell</i>	122
• <i>Rectified 120-cell</i>	122
• stumpfer 600-Zeller	122
• <i>Omnitruncated 24-cell</i>	122
• <i>Runcinated 120-cell</i>	122
• <i>Cantellated 600-cell</i>	122
• <i>Cantellated 120-cell</i>	122
• <i>Bitruncated 120-cell</i>	122
• stumpfer 120-Zeller	122
• <i>Runcitruncated 600-cell</i>	123
• <i>Cantitruncated 600-cell</i>	123

- *Runcitruncated 120-cell* 123
- *Cantitruncated 120-cell* 123
- *Omnitruncated 600-cell* 123

Abwicklung des stumpfen Ikosaeders 194

Abwicklung von $(3,3,3,3)(3,3,3,3)(3,3,3,3)$ 195

Teilabwicklung eines Testkomplexes 195

Parallelprojektion des Hexaeders 196

Parallelprojektion des 8-Zellers 196

Zentralprojektion des Hexaeders 196

Zentralprojektion des Ikosaeders 196

Zentralprojektion des 8-Zellers 197

Zentralprojektion des stumpfen 8-Zellers 197

Zentralprojektion des 4,5-Biprismachors 197

Tabellenverzeichnis

Keilwinkel für Zellen mit drei Flächen pro Ecke	12
Keilwinkel der Zellen, die auf Ecken mit drei Flächen zurückführbar sind	14
Keilwinkel der Antiprismen	16
Keilwinkel aller uniformen Polyeder	23
Die Platonischen Polyeder	25
Die Archimedischen Polyeder	26
Die Prismen	27
Die Antiprismen	27
Innenradien der regelmäßigen Flächen ($k = 1$)	31
Radien aller uniformen Polyeder ($k = 1$)	31
Zusammenfassung der höchstens möglichen uniformen Polychora . .	92
Die antiprismatischen Prismachora (uniform)	95
Die p, q -Biprismachora (uniform)	95
Durch Expansion und Kontaktion erzeugte uniforme Polychora . . .	100
Durch prismatisches Hochziehen erzeugte uniforme Polychora . . .	104
Die Erzeugung der uniformen Biprismachora	106
Alle existierenden uniformen Polychora	113
Die 1000 Kantenkombinationen (Programmausgabe)	127
Nach Radius sortierte Kantenkombinationen	139
Kantenkombinationen mit $p > 14$	178
Abkürzungen	202
Griechische und römische Zahlen	203

Kapitel 1

Einleitung

„Die Natur spricht die Sprache der Mathematik: Die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Figuren.“

Galileo Galilei

1.1 Historisches

In dieser Arbeit wird es um eine Erweiterung eines der ältesten Teilgebiete der Geometrie, der regelmäßigen Polyeder, gehen. Die Wurzeln dieses Teilgebietes reichen zurück bis vor die Zeit um 500 vor Christus. Umfangreichere Arbeiten wurden wahrscheinlich erstmals um 400 vor Christus von Platon durchgeführt. Obwohl es sichere Indizien gibt, dass er viele Ideen von anderen Autoren übernommen hatte, werden die fünf regelmäßigsten Polyeder ihm zugesprochen und zu seinem Andenken die Platonischen Polyeder oder die Platonischen Körper genannt. Platon beschreibt Polyeder „höchster Perfektion und Harmonie“, die nur aus gleichen Flächen bestehen und deren Flächen selber alle gleich lange Kanten und gleich große Winkel haben (also selbst regelmäßig sind). Seine Arbeiten über diese Körper hatten nicht nur große Auswirkungen auf die Mathematik im Allgemeinen und die Geometrie im Speziellen, sondern auch auf die Philosophie, die Astronomie, die Astrologie und auf viele andere Wissensgebiete [10].

Weitere Arbeiten zu regelmäßigen Polyedern folgten um 250 vor Christus von Archimedes. Er beschreibt dreizehn Polyeder, deren Flächen alle regelmäßig, aber nicht gleich sind. Auch diese Arbeiten über die Archimedischen Polyeder hatten einen großen auf viele Wissensgebiete.

Diese und viele weitere Arbeiten, die im Mittelalter und bis hinein in die frühe Neuzeit darüber verfasst wurden, bezogen sich auf greifbare Objekte im

3-dimensionalen Raum (z.B. Johannes Keplers Arbeiten über Polyeder). Erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts – mit der Weiterentwicklung der klassischen hin zur projektiven und nichteuklidischen Geometrie – tauchten erste Überlegungen zu höherdimensionalen geometrischen Objekten auf. Schließlich waren es Ludwig Schläfli und Victor Schlegel (um 1850 bzw. 1883), die sich als erste mit 4- und höherdimensionalen Körpern („Polyscheme“) befassten. Aber erst im 20. Jahrhundert bildete sich der allgemeine Begriff der Polytope als Analogon zu Polyedern im n -Dimensionalen aus [21].

Beide, Schläfli und Schlegel, befassten sich jedoch hauptsächlich mit regelmäßigen Polytopen. Schläfli war der erste, der zeigen konnte, dass es im 4-Dimensionalen sechs, in höheren Dimensionen allerdings nur noch je drei regelmäßige Polytope gibt [19]. Schlegel wurde bekannt durch die nach ihm benannten Diagramme von Polyedern in der Ebene und von 4-dimensionalen Polytopen im Anschauungsraum bzw. in der Ebene [20].

Die ersten Arbeiten zu den halbbregelmäßigen Polytopen waren Anfang des 20. Jahrhunderts die Untersuchungen von Thorold Gosset und Alicia Boole Stott. Allerdings wurde die Halbbregelmäßigkeit immer auf unterschiedliche Art definiert. Für Gosset waren halbbregelmäßige Polytope in n Dimensionen zusammengesetzt aus verschiedenen, aber selbst regelmäßigen Polytopen niedrigerer Dimension [11]. Boole Stott hingegen erlaubte schon die Archimedischen Polyeder als Teile der Polytope [2]. Erst Harold Scott Macdonald Coxeter führte die Halbbregelmäßigkeit genauer ein (siehe weiter unten die Definition von Uniformität) [7].

Später folgten umfangreichere Arbeiten von Norman Woodason Johnson [13], Willem Abraham Wythoff, John Horton Conway, Mike J.T. Guy [4] und Branko Grünbaum [12], um nur einige zu nennen. Alle befassten sich unter anderem mit Teilaspekten der halbbregelmäßigen Polytope. Allerdings konnte keiner einen vollständigen Beweis über die Art und Anzahl dieser Polytope in Dimensionen größer als 3 liefern.

In der hier vorliegenden Arbeit wird nun ein weiterer Schritt hin zur vollständigen Charakterisierung und Aufzählung der regelmäßigen und halbbregelmäßigen Polytope höherer Dimensionen getan: der vollständige Beweis über die Art und Anzahl der uniformen Polytope in vier Dimensionen.

1.2 Definitionen

Als erstes werden die Terminologien, die in dieser Arbeit verwendet werden, durch einige Definitionen erklärt. Dabei werden aber grundsätzliche Begriffe wie Ecken/Punkte, Linien, Geraden und Flächen als bekannt vorausgesetzt.

Wenn wir von **Polygonen** sprechen, insbesondere von bestimmten n -gonen oder **n -Ecken**, so sind immer konvexe, regelmäßige und planare Flächen, begrenzt durch eine endliche Anzahl von Kanten (gerade Strecken), gemeint. Des Weiteren sollen die hier genannten **Polyeder** immer endlich, konvex, in einer 3-dimensionalen Hyperebene liegend und begrenzt durch regelmäßige Polygone sein. In beliebig hohen Dimensionen sprechen wir allgemein von **Polytopen**, die wieder konvex, endlich und von Polytopen einer Dimension niedriger begrenzt sind. Speziell im 4-Dimensionalen heißen diese Polytope **Polychora** (singular Polychor, das). Polyeder erhalten als Teile von Polychora den Namen **Zelle**.

Kommen wir zur genauen Definition von **Regelmäßigkeit** oder **Regularität**: Ein Polygon heißt regelmäßig, wenn alle seine Kanten gleich lang und alle seine Winkel gleich groß sind (in dieser Arbeit soll ein Polygon außerdem in einer Ebene liegen und konvex sein). Ein Polytop in n Dimensionen heißt regelmäßig, wenn es aus regelmäßigen und gleichen Polytopen der Dimension $n - 1$ aufgebaut ist und über **Eckentransitivität** verfügt (d.h. es existiert für jedes Paar von Ecken eine Bewegung, die die eine Ecke in die andere überführt und dabei das Polytop auf sich abbildet).

In drei Dimensionen sind dies genau die Platonischen Polyeder. Deshalb werden regelmäßige Polytope in höheren Dimensionen oft als Platonische Polytope bezeichnet.

Zu dieser Definition gibt es etliche äquivalente Eigenschaften; eine davon soll hier angeführt werden: Regelmäßige Polytope haben eine Sphäre, auf der alle Ecken liegen (**Umsphäre**), eine Sphäre, auf der alle Kantenmittelpunkte liegen, eine, auf der alle Flächenmittelpunkte liegen, eine, auf der alle Zellmittelpunkte liegen, usw. Dabei haben alle Sphären den gleichen Mittelpunkt, den **Mittelpunkt** des Polytops.

Bei der Definition von Halbreelmäßigkeit gab es lange Zeit Uneinigkeit. Selbst im 3-Dimensionalen gibt es mehrere Möglichkeiten einer Definition. So könnte die Transitivität der Ecken, die Regelmäßigkeit der Flächen oder die Gleichheit der Flächen aufgegeben werden. Aus diesem Grunde definieren wir einen neuen Begriff: **Uniformität**.

Ein Polygon ist **uniform**, wenn es regelmäßig ist. Ein Polytop in n Dimensionen, $n \geq 3$, ist **uniform**, wenn es nur aus (nicht notwendig gleichen) uniformen Polytopen der Dimension $n - 1$ aufgebaut ist und über Eckentransitivität verfügt.

In diesem Sinne sind die Archimedischen Polyeder uniform. Allerdings gibt es daneben noch mehr uniforme Polyeder: die Platonischen Polyeder, die Prismen (bestehend aus zwei parallelen n -Ecken, verbunden mit 4-Ecken) und die Antiprismen (zwei parallelen n -Ecken, die verdreht zueinander und somit durch 3-Ecke verbunden sind).

Es wird sich herausstellen, dass die uniformen Polychora aus den Platonischen Polychora, den prismatischen Polychora (von denen es unendlich viele gibt), den biprismatischen Polychora (von denen es ebenfalls unendlich viele gibt) sowie aus 41 weiteren Polychora bestehen (Kapitel 8 und 9). Da im 3-Dimensionalen die Platonischen Polyeder und die Prismen und Antiprismen ebenfalls von den uniformen Polyedern abgezogen werden, um die Archimedischen Polyeder zu erhalten, ist es naheliegend, diese 41 als Archimedische Polychora zu bezeichnen, auch wenn sich dies in der Literatur noch nicht durchgesetzt hat.

Durch die Eckentransitivität besitzen auch uniforme Polytope spezielle Sphären mit gleichem Mittelpunkt: So gibt es zu jedem uniformen Polychor eine Sphäre, auf der alle Ecken liegen, eine, auf der alle Kantenmittelpunkte liegen, eine für jede Art von Fläche (3-Eck, 4-Eck usw.), die vorkommt, je eine Sphäre, auf der die Mittelpunkte der Flächen des jeweiligen Types liegen, und je eine Sphäre für die verschiedenen Zellen, so dass jeweils die Mittelpunkte gleicher Zellen auf einer Sphäre liegen.

Zwei weitere Begriffe dieser Arbeit, die noch einer Erklärung bedürfen, sind **Eckenumgebung** und **Kantenkombination** oder **-umgebung**. Bei der Eckenumgebung handelt es sich um die Umgebung einer Ecke eines Polytopes. Sie beschreibt bei den Polyedern, welche Flächen in welcher Reihenfolge um diese Ecke herum liegen und wird dann meist nur als Flächentypenzyklus aufgeschrieben. Da die benutzten Polyeder alle uniform sind und also über Eckentransitivität verfügen, ist die Beschreibung einer Ecke durch deren Umgebung eindeutig und wird deshalb in dieser Arbeit als Synonym für die entsprechende Zelle benutzt: So ist (4,4,4) z.B. der Hexaeder, (3,3,3,7) das 7-Antiprisma. Bei den Polychora ist eine Eckenumgebung die Anordnung der Zellen in der Umgebung dieser Ecke. Da diese Umgebung räumlich ist, gibt es dazu leider keine einfache Darstellung (lediglich die Darstellung der

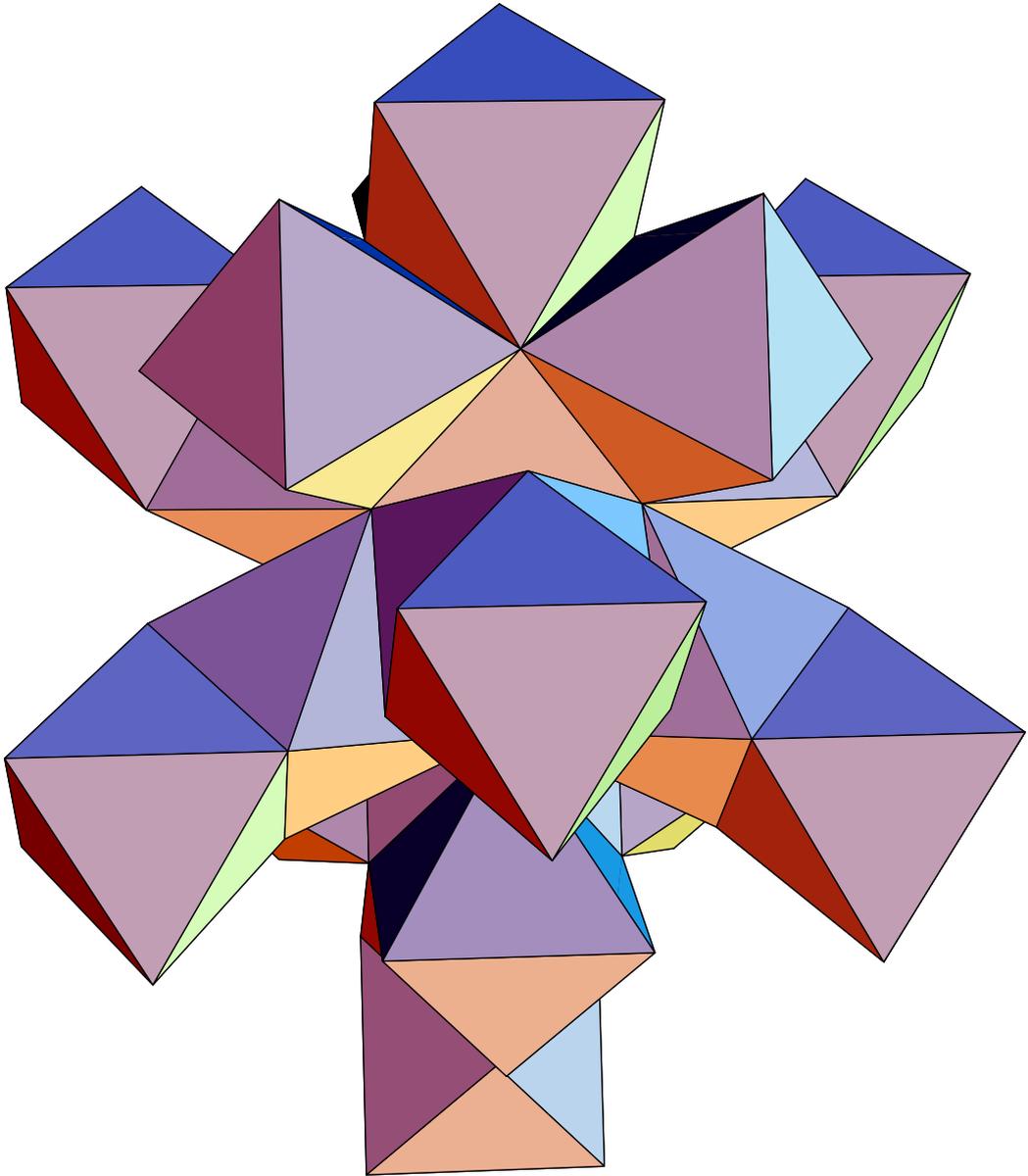
Eckenumgebung als Eck-Figur, einem unregelmäßigen Polyeder, der entsteht, wenn die Ecke abgeschnitten wird, ist möglich).

Eine **Kantenkombination** eines Polychors ist dagegen wieder einfach darstellbar. Es ist der Zyklus von Zellen um eine bestimmte Kante herum und wird deshalb auch analog zu einer Eckenumgebung eines Polyeder geschrieben: $(4,4,4)(4,4,4)(4,4,4)$ wäre so die Kantenkombination des 8-Zellers, des 4-dimensionalen Würfels. Um diese (hier sogar um jede) Kante liegen drei Hexaeder. Da aber die uniformen Polychora nicht über Kantentransitivität verfügen, kommen bei den meisten verschiedene Kantenumgebungen vor.

Ab Kapitel 7 werden mehrere Kantenkombinationen zu Eckenumgebungen zusammengefügt. Dieses erfolgt nur lokal (da ja alle Eckenumgebungen aufgrund der Eckentransitivität gleich sind). Somit erfolgen die Argumentationen vollständig im 3-dimensionalen Anschauungsraum, ohne dass die vierte Dimension explizit vorgestellt werden muss. Das Zusammenfügen der Zellen an Flächen, Kanten und Ecken ist also lediglich eine Art Puzzle aus Zellen.

Schließlich definieren wir die verschiedenen in dieser Arbeit relevanten Winkel. Der Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten auf einer Fläche entspricht dem Winkel im üblichen Sinne und heißt hier **Flächenwinkel**. Des Weiteren ist der Winkel zwischen zwei Flächen, die eine gemeinsame Kante haben, der Winkel (im üblichen Sinne) am Kantenmittelpunkt und zwischen den Halbgeraden vom Kantenmittelpunkt zu den Flächenmittelpunkten. Dieser Winkel heißt **Keilwinkel**. Zu guter Letzt benötigen wir noch den Winkel zwischen zwei Zellen, die sich an einer Fläche berühren. Analog ist dies der Winkel (im üblichen Sinne) am Flächenmittelpunkt und zwischen den Halbgeraden vom Flächenmittelpunkt zu den Zellmittelpunkten. Diesen Winkel nennen wir **Faltwinkel**.

In dieser Arbeit soll es nun darum gehen, die uniformen Polychora vollständig zu beschreiben und damit zu zeigen, dass es neben den schon bekannten 41 Archimedischen Polychora keine weiteren gibt.

24-Zeller ¹

¹Abwicklung; aus [25]

Kapitel 2

Beweisidee

„Es steckt erstaunlich viel Imagination in der Mathematik der Natur; und Archimedes hatte mindestens so viel Phantasie wie Homer.“

Voltaire

Der Beweis in dieser Arbeit basiert auf der Idee, alle kombinatorisch möglichen Kantenumgebungen zu bestimmen und für jede den Radius der umschriebenen 4-dimensionalen Sphäre zu berechnen. Es ist offensichtlich, dass in der Umgebung einer Ecke nur Kantenkombinationen vorkommen können, die den gleichen Radius haben. Es müssen also folglich nur solche Eckenumgebungen betrachtet werden, deren Kantenumgebungen alle gleichen Radius haben. Da wir Eckentransitivität voraussetzen und bei der Bestimmung der Kantenumgebungen nur Polyeder (=Zellen) betrachtet haben, die selber uniform sind, erhalten wir Beschreibungen aller möglichen Eckenumgebungen 4-dimensionaler uniformer Polychora. Wir müssen diese Eckenumgebungen dann nur noch mit den Archimedischen Polychora eindeutig identifizieren.

Um die Radien der möglichen Kantenkombinationen zu berechnen, müssen wir erst einmal alle Keilwinkel und Radien in den Zellen bestimmen; genauer die Radien vom Polyedermittelpunkt zu den Flächenmittelpunkten (Innsphären mit dem Inradius; nicht eindeutig, da wir verschiedene Typen von Flächen haben!), zu den Kantenmittelpunkten (Mitsphären mit dem Mitradius) und zu den Ecken (Umsphären mit dem Umradius). Daraus werden dann die Faltwinkel zwischen den einzelnen Zellen in einer möglichen Kantenumgebung berechnet, und dann ergeben sich – zusammen mit den Radien der Zellen – die Radien der Umsphäre des möglichen Polychors.

Bei all diesen (größtenteils numerischen) Rechenschritten werden natürlich Rechenfehler durch Rundungen, Auslöschungen und/oder Ungenauigkeiten bei der Berechnung trigonometrischer Funktionen gemacht. Selbst

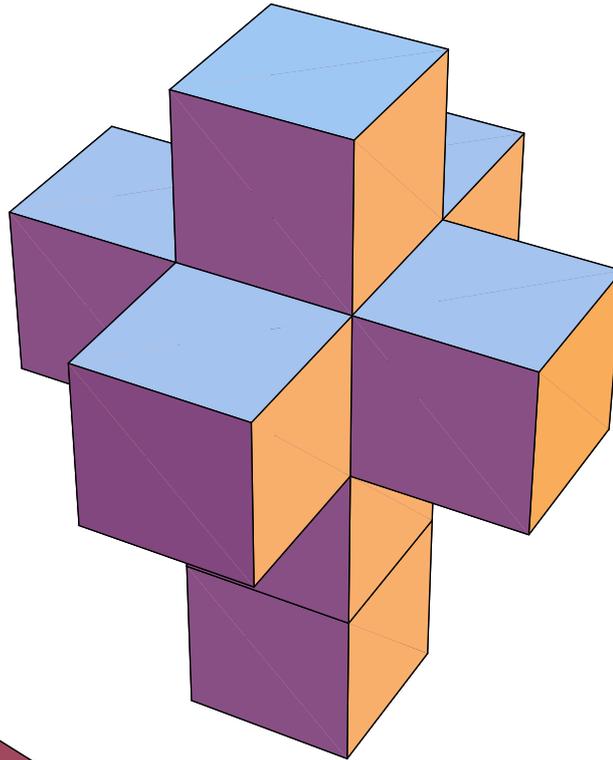
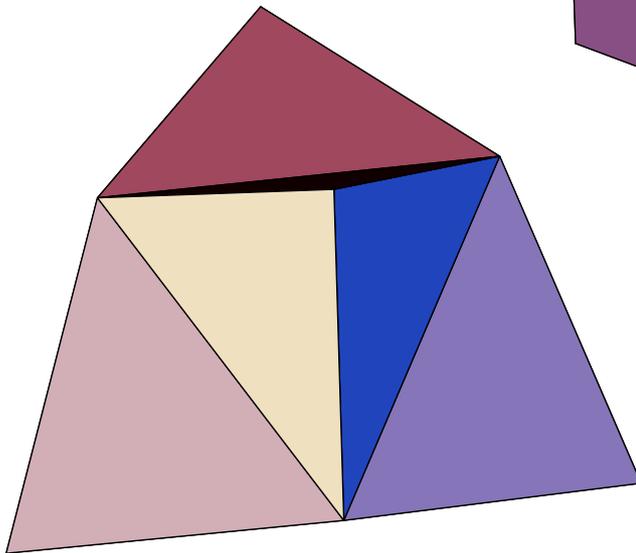
wenn wir mit 10, 20 oder mehr Nachkommastellen arbeiten, werden wir also zwangsläufig nicht *genau* gleiche Werte für logischerweise gleiche Radien erhalten; z.B. könnten andere Ergebnisse herauskommen, wenn wir einmal die Keilwinkel des Oktaeders als Doppelpyramide und einmal als Antiprisma berechnen. Um trotzdem die Eigenschaft der Gleichheit einiger Radien auszunutzen, machen wir im Anhang C.1 (ab Seite 173) eine Fehlerabschätzung, die Folgendes rechtfertigt: Anstatt Kombinationen von Kantenumgebungen mit *gleichem* Radius zu berücksichtigen, betrachten wir einfach *keine* der Kombinationen von Kantenumgebungen, deren Radien sich (nach unserer Fehlerabschätzung) sicher *unterscheiden* und lassen also kleine Ungenauigkeiten bei den Radien zu. Mit dieser Methode beschränken wir erstens die Anzahl der zu betrachtenden Kombinationen immer noch sehr stark, schließen aber keine Kombination aus, die durch Rechenfehler sonst ausgeschlossen worden wäre.

Da wir als Zellen alle uniformen Polyeder zulassen wollen, bekommen wir das Problem, dass es neben den Platonischen und Archimedischen Polyedern auch noch die Prismen und Antiprismen gibt, von denen bekanntlich unendlich viele existieren. Nun finden wir aber bei den Platonischen und Archimedischen Polyedern nur 3-, 4-, 5-, 6-, 8- und 10-Ecke. Somit dürften sich mögliche Kombinationen von (Anti-)Prismen mit Flächen größeren Typs meist außerhalb der erstgenannten Polyeder bilden. Und selbst wenn es uniforme Polychora geben sollte, die aus (Anti-)Prismen und Platonischen und/oder Archimedischen Polyedern gebildet werden, wird es dann sicherlich nicht für jedes (Anti-)Prisma grundsätzlich andere Arten von Kombinationen geben, sondern eher Baupläne der folgenden Art: an jeder Ecke ein p -Prisma, ein p -Antiprisma, drei Tetraeder und ein Kubo-Oktaeder für alle $p > 7$. Somit brauchen wir nicht alle p -(Anti-)Prismen zu betrachten; vielmehr können wir uns bei den folgenden Betrachtungen auf kleine p beschränken. In dieser Arbeit soll $p = 14$ die Grenze sein. In Kapitel 8 (ab Seite 97) werden wir sehen, dass diese Argumentation gerechtfertigt ist und wir somit aus den gefundenen Kombinationen alle mit p -(Anti-)Prismen (p beliebig groß) angeben können. Der Vollständigkeit halber werden im Anhang ab Seite 178 die Fälle mit $p > 14$ trotz dieser Argumentation noch einmal betrachtet.

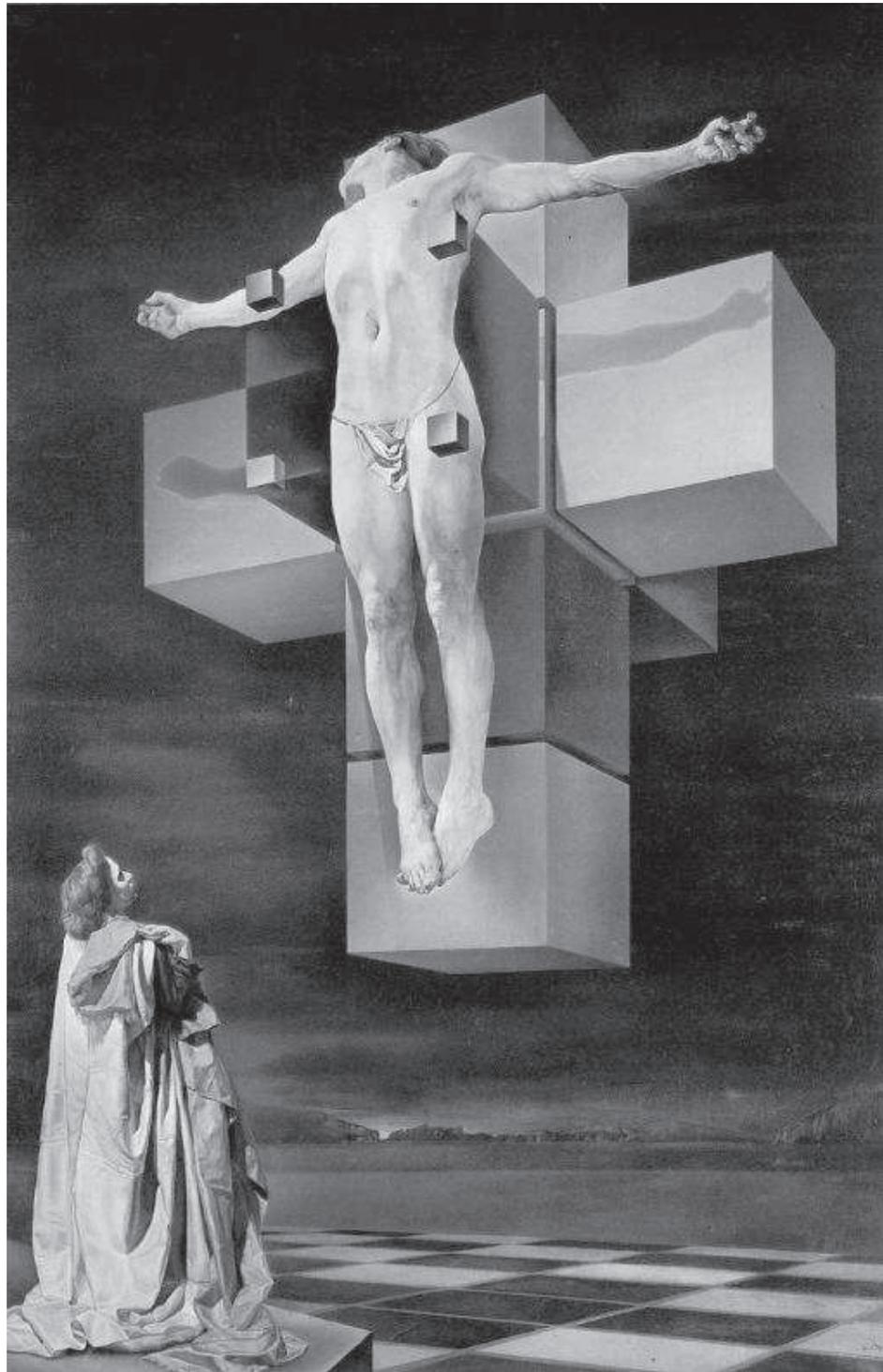
Bei der Zusammensetzung der einzelnen Kantenumgebungen zu einer Eckenumgebung werden wir vier kleine Lemmata aufstellen und mit ihnen die unmöglichen Eckenumgebungen ausschließen. Zum Schluss werden die übrig gebliebenen Kombinationen eindeutig mit den uniformen – d.h. den Archimedischen – Polychora identifiziert.

Einer ähnlichen Beweisidee folgten übrigens schon Conway und Guy 1963 [4]; sie betrachteten die Eck-Figuren der Zellen, d.h. die durch die Eck-Nach-

barn einer Ecke gebildeten Flächen. Anschließend kombinierten sie diejenigen zu sich schließenden, unregelmäßigen Polyeder, deren Ecken auf einer Sphäre liegen. Damit konnten sie zwar die bekannten uniformen Polychora bestätigen und sogar noch ein weiteres finden. Leider wurde aber – abgesehen von einer zweiseitigen Zusammenfassung der Ergebnisse – nie eine Arbeit darüber veröffentlicht.

8-Zeller ²5-Zeller ²

²Abwicklung; aus [25]



Christus Hypercubus von Salvador Dalí, 1955
(Jesus gekreuzigt an einer Abwicklung des 4-dim. Würfels)

Kapitel 3

Die Keilwinkel

„Die reine Mathematik ist auf ihre Art die Poesie logischer Gedanken.“

Albert Einstein

3.1 Zellen mit drei Flächen pro Ecke

Zur Bestimmung der Keilwinkel bei Zellen mit drei Flächen pro Ecke bedienen wir uns der sphärischen Trigonometrie [1]. Denn diese Zellen haben als Eck-Figuren 3-Ecke, deren Kanten durch die Winkel in den Ecken der Flächen gegeben sind. Aus diesen lassen sich die Winkel zwischen den Kanten des sphärischen 3-Ecks mit Hilfe des Seitenkosinussatzes bestimmen. Diese Winkel entsprechen genau den Keilwinkeln.

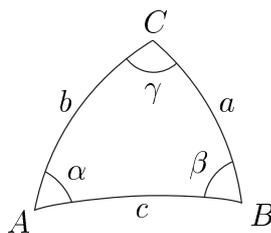
Weiter oben haben wir die Zellen durch die Anordnung der Flächen um eine Ecke beschrieben. Um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass die meisten Zellen verschieden große Keilwinkel besitzen, wird nun die Kurzschreibweise der Zellen so zyklisch vertauscht, dass die beiden Flächen vorne stehen, deren Keilwinkel angegeben ist. So hat der stumpfe Tetraeder die Keilwinkel $(3,6,6)$ und $(6,6,3)$. Dabei soll die kleinere Zahl immer an erster Stelle, die größeren Zahlen immer hinten stehen – und nicht wie bei $(6,3,6)$. Gleiches soll natürlich auch für die Zellen mit vier oder fünf Flächen gelten – also hat z.B. der schräge Dodekaeder die Keilwinkel $(3,5,3,3,3)$ und $(3,3,3,3,5)$.

Der Seitenkosinussatz ist ein Satz über sphärische 3-Ecke und setzt die Seiten und die Winkel in diesen 3-Ecken in Beziehung. Seien die Ecken des 3-Ecks A , B und C . Weiter sei die Kante CB mit a bezeichnet, AC mit b und AB mit c . Außerdem sei α der Winkel bei A , β bei B und γ bei C . Mit

R als Radius der Sphäre erhalten wir die normierten Kantenlängen $a_* := \frac{a}{R}$, $b_* := \frac{b}{R}$ und $c_* := \frac{c}{R}$. Dann ist die Aussage des Seitenkosinussatzes

$$\begin{aligned} \cos c_* &= \cos a_* \cos b_* + \sin a_* \sin b_* \cos \gamma \quad \text{bzw.} \\ \gamma &= \arccos \left(\frac{\cos c_* - \cos a_* \cos b_*}{\sin a_* \sin b_*} \right) \end{aligned}$$

wobei a_* , b_* und c_* bzw. α , β und γ zyklisch vertauscht werden können.



Damit lassen sich alle Keilwinkel der Zellen bestimmen, an deren Ecken jeweils drei Flächen grenzen. Die jetzt noch benötigten Flächenwinkel φ der p -gone (also a_* , b_* und c_*) ergeben sich aus

$$\varphi = \frac{p-2}{p}\pi.$$

Jetzt lassen sich alle Zellen mit drei Flächen pro Ecke angeben; erst die Platonischen, dann die Archimedischen Polyeder, zum Schluss die Prismen.

Konfig.	Eck	Eck	Winkel in π	Polyeder
(3,3,3)	3	3	0.39182655203060727	Tetraeder
(4,4,4)	4	4	0.50000000000000000	Hexaeder
(5,5,5)	5	5	0.64758361765043327	Dodekaeder
(3,6,6)	3	6	0.60817344796939273	stumpfer Tetraeder
(6,6,3)	6	6	0.39182655203060727	stumpfer Tetraeder
(3,8,8)	3	8	0.69591327601530364	stumpfer Hexaeder
(8,8,3)	8	8	0.50000000000000000	stumpfer Hexaeder
(3,10,10)	3	10	0.79234795477416836	stumpfer Dodekaeder
(10,10,3)	10	10	0.64758361765043327	stumpfer Dodekaeder
(4,6,6)	4	6	0.69591327601530364	stumpfer Oktaeder
(6,6,4)	6	6	0.60817344796939273	stumpfer Oktaeder
(5,6,6)	5	6	0.79234795477416836	stumpfer Ikosaeder
(6,6,5)	6	6	0.76772047280123001	stumpfer Ikosaeder
(4,6,8)	4	6	0.80408672398469637	großer Rhomben- Kubo-Oktaeder

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von voriger Seite

Konfig.	Eck	Eck	Winkel in π	Polyeder
(4,8,6)	4	8	0.7500000000000000	großer Rhomben- Kubo-Oktaeder
(6,8,4)	6	8	0.69591327601530364	großer Rhomben- Kubo-Oktaeder
(4,6,10)	4	6	0.88386023640061501	großer Rhomben- Ikosi-Dodekaeder
(4,10,6)	4	10	0.82379180882521664	großer Rhomben- Ikosi-Dodekaeder
(6,10,4)	6	10	0.79234795477416836	großer Rhomben- Ikosi-Dodekaeder
(3,4,4)	3	4	0.5000000000000000	3-Prisma
(4,4,3)	4	4	0.3333333333333333	3-Prisma
(5,4,4)	5	4	0.5000000000000000	5-Prisma
(4,4,5)	4	4	0.6000000000000000	5-Prisma
(6,4,4)	6	4	0.5000000000000000	6-Prisma
(4,4,6)	4	4	0.6666666666666667	6-Prisma
(7,4,4)	7	4	0.5000000000000000	7-Prisma
(4,4,7)	4	4	0.71428571428571429	7-Prisma
(8,4,4)	8	4	0.5000000000000000	8-Prisma
(4,4,8)	4	4	0.7500000000000000	8-Prisma
(9,4,4)	9	4	0.5000000000000000	9-Prisma
(4,4,9)	4	4	0.7777777777777778	9-Prisma
(10,4,4)	10	4	0.5000000000000000	10-Prisma
(4,4,10)	4	4	0.8000000000000000	10-Prisma
(11,4,4)	11	4	0.5000000000000000	11-Prisma
(4,4,11)	4	4	0.81818181818181818	11-Prisma
(12,4,4)	12	4	0.5000000000000000	12-Prisma
(4,4,12)	4	4	0.8333333333333333	12-Prisma
(13,4,4)	13	4	0.5000000000000000	13-Prisma
(4,4,13)	4	4	0.84615384615384615	13-Prisma
(14,4,4)	14	4	0.5000000000000000	14-Prisma
(4,4,14)	4	4	0.85714285714285714	14-Prisma

3.2 Zellen mit vier und fünf Flächen, die sich auf Polyeder mit drei Flächen pro Ecke zurückführen lassen

Unter den Archimedischen Polyedern lassen sich einige finden, die sich zerlegen lassen in Teilpolyeder, die wiederum aus regelmäßigen Polygonen aufgebaut sind. Diese Teilpolyeder haben dann natürlich die entsprechend gleichen Keilwinkel, wenn an diesen Kanten nicht gerade geschnitten wurde. So lässt sich $(3,4,3,4)$ in der Mitte teilen (die Schnittfläche ist ein regelmäßiges 6-Eck) und die Teile haben an den Schnittecken wieder nur drei Flächen, nämlich 3-Eck, 4-Eck und 6-Eck. Der Keilwinkel von $(3,4,3,4)$ ist dann aber auch gleich dem Keilwinkel $(3,4,6)$. Gleiches gilt für $(3,5,3,5)$ und $(3,4,5,4)$, wo die Schnittflächen regelmäßige 10-Ecke sind, und für $(3,4,4,4)$ mit einem regelmäßigen 8-Eck als Schnittfläche. Des Weiteren lassen sich die Keilwinkel der noch fehlenden zwei Platonischen Polyeder berechnen: Der Oktaeder besitzt in der Mitte ein regelmäßiges 4-Eck; der Ikosaeder lässt sich entlang regelmäßiger 5-Ecke ‚köpfen‘.

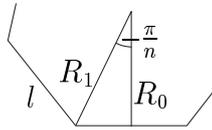
Konfig.	Eck	Eck	Winkel in π	Polyeder
$(3,4,3,4)$	3	4	0.69591327601530364	Kubo-Oktaeder
$(3,5,3,5)$	3	5	0.79234795477416836	Ikosi-Dodekaeder
$(3,4,5,4)$	3	4	0.88386023640061501	Rhomben- Ikosi-Dodekaeder
$(4,5,4,3)$	4	5	0.82379180882521664	Rhomben- Ikosi-Dodekaeder
$(3,4,4,4)$	3	4	0.80408672398469637	Rhomben- Kubo-Oktaeder
$(4,4,3,4)$	4	4	0.75000000000000000	Rhomben- Kubo-Oktaeder
$(3,3,3,3)$	3	3	0.60817344796939273	Oktaeder
$(3,3,3,3,3)$	3	3	0.76772047280123001	Ikosaeder

3.3 Antiprismen

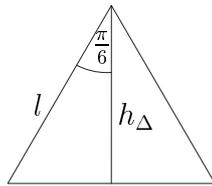
Die Keilwinkel in den Antiprismen lassen sich weder durch Zerlegung noch durch irgendeinen anderen wohlbekanntem Satz schnell berechnen.

Sei l die Kantenlänge eines n -Antiprismas. Dann ist der Radius R_1 des Umkreises eines n -Ecks gegeben durch $\frac{1}{2}l = R_1 \sin \frac{\pi}{n}$, also $R_1 = \frac{l}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2}l \csc \frac{\pi}{n}$; und der Radius R_0 des Inkreises durch $R_0 = R_1 \cos \frac{\pi}{n}$, folglich

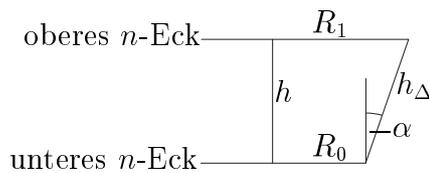
$$R_0 = \frac{1}{2}l \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2}l \tan^{-1} \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}l \cot \frac{\pi}{n} .$$



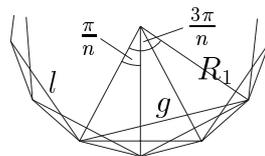
Bei einem 3-Eck derselben Kantenlänge l ist die Höhe h_Δ gegeben durch $h_\Delta = l \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}l\sqrt{3}$.



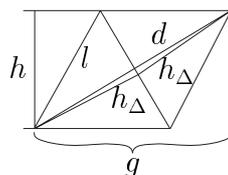
Gesucht sei nun die Höhe h des Antiprismas $(3,3,3,n)$ mit Kantenlänge l . $h = h_\Delta \cos \alpha$ mit $h_\Delta \sin \alpha = R_1 - R_0 \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{R_1 - R_0}{h_\Delta}$.



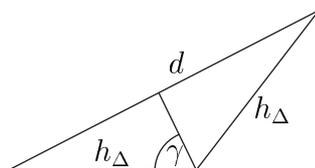
Der Keilwinkel zwischen einem n -Eck und einem 3-Eck beim $(3,3,3,n)$ ist demnach $\alpha + \frac{\pi}{2}$, also $\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{R_1 - R_0}{h_\Delta}$. So ist jetzt nur noch der Keilwinkel zwischen zwei 3-Ecken beim $(3,3,3,n)$ zu ermitteln. Sei g die Projektion einer Diagonale, die die gegenüber liegenden Spitzen zweier aneinander grenzender 3-Ecke verbindet, auf die Ebene des n -Ecks.



Dann ist $g = 2R_1 \sin \frac{3\pi}{2n}$. Um die Diagonale d selbst zu berechnen, ist noch die Höhe h des Antiprismas nötig, und mit $d^2 = h^2 + g^2$ bekommen wir die gesuchte Relation.



Betrachten wir nun das 3-Eck, gebildet durch diese Diagonale d und die entsprechenden Höhenlinien der 3-Ecke dieser Diagonale, dann sieht man sofort $\frac{d}{2} = h_{\Delta} \sin \gamma \Rightarrow \gamma = \arcsin \frac{d}{2h_{\Delta}}$. 2γ ist der Keilwinkel zwischen zwei 3-Ecken im $(3,3,3,n)$.



Damit erhalten wir nach kurzem Umformen $\alpha = \arcsin \frac{\frac{1}{2} \csc \frac{\pi}{n} - \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{2} \sqrt{3}} = \arcsin \frac{\csc \frac{\pi}{n} - \cot \frac{\pi}{n}}{\sqrt{3}}$ und $\gamma = \arcsin \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cos \arcsin \frac{\csc \frac{\pi}{n} - \cot \frac{\pi}{n}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{3\pi}{2n}}{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{n}}\right)^2} = {}^3 \arcsin \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{n}}$, woraus folgende Formeln für die Keilwinkel der Antiprismen folgen: $(3,n,3,3)$ ist $\frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\csc \frac{\pi}{n} - \cot \frac{\pi}{n}}{\sqrt{3}}$ und $(3,3,3,n)$ ist $2\gamma = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{n}}$, also

Konfig.	Eck	Eck	Winkel in π	Polyeder
(3,3,3,4)	3	3	0.70862001614328658	4-Antiprisma
(3,4,3,3)	3	4	0.57686755821809152	4-Antiprisma
(3,3,3,5)	3	3	0.76772047280123001	5-Antiprisma
(3,5,3,3)	3	5	0.56006842757539837	5-Antiprisma
(3,3,3,6)	3	3	0.80678828517724062	6-Antiprisma
(3,6,3,3)	3	6	0.54944127155450689	6-Antiprisma
(3,3,3,7)	3	3	0.83456812595788539	7-Antiprisma
(3,7,3,3)	3	7	0.54206809759401324	7-Antiprisma
(3,3,3,8)	3	3	0.85534657160805150	8-Antiprisma
(3,8,3,3)	3	8	0.53663621231196770	8-Antiprisma
(3,3,3,9)	3	3	0.87147910908580449	9-Antiprisma
(3,9,3,3)	3	9	0.53246095481441045	9-Antiprisma
(3,3,3,10)	3	3	0.88436948151897343	10-Antiprisma
(3,10,3,3)	3	10	0.52914802486924264	10-Antiprisma
(3,3,3,11)	3	3	0.89490695226159224	11-Antiprisma
(3,11,3,3)	3	11	0.52645348284282490	11-Antiprisma
(3,3,3,12)	3	3	0.90368248334127800	12-Antiprisma
(3,12,3,3)	3	12	0.52421796670086522	12-Antiprisma
(3,3,3,13)	3	3	0.91110425250069535	13-Antiprisma

Fortführung auf folgender Seite

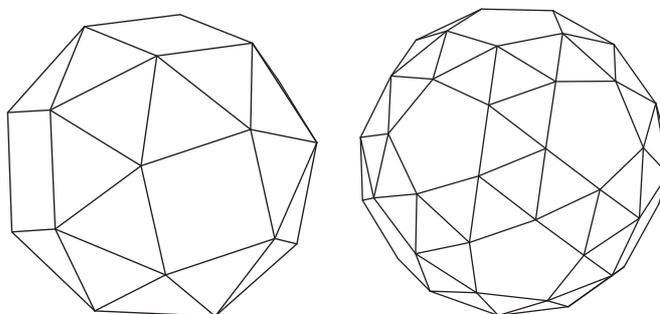
³Im Anhang auf Seite 199 wird diese Umformung vorgeführt.

Fortführung von voriger Seite

Konfig.	Eck	Eck	Winkel in π	Polyeder
(3,13,3,3)	3	13	0.52233280033885968	13-Antiprisma
(3,3,3,14)	3	3	0.91746330402035646	14-Antiprisma
(3,14,3,3)	3	14	0.52072124784978105	14-Antiprisma

3.4 Ausnahmen

Einzig die Keilwinkel des schrägen Hexaeders (3,3,3,3,4) und des schrägen Dodekaeders (3,3,3,3,5) lassen sich nicht auf die bis jetzt erwähnten Arten berechnen.

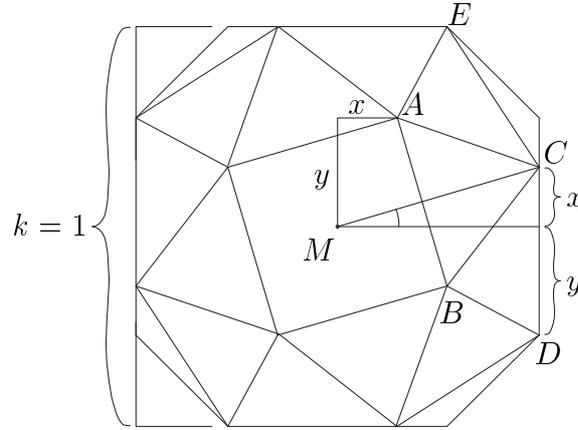


Als erstes müssen wir uns Gedanken darüber machen, wie viele verschiedene Keilwinkel vorkommen können. So kommen Winkel zwischen p -Eck ($p=4$ oder 5) und 3-Ecken vor, weiter Winkel zwischen einem 3-Eck, dass an dem p -Eck anliegt und dem nächsten, wobei es prinzipiell zwei Möglichkeiten gibt: Einmal zu einem 3-Eck, dass wieder an einem p -Eck liegt; zum Zweiten zu einem 3-Eck, dass nur über Ecken mit p -Ecken verbunden ist.

Da wir aber Polyeder mit Eckentransitivität betrachten, ist es leicht zu sehen, dass alle Ecken dann auf ein und derselben Sphäre liegen. Auch alle Kantenmittelpunkte liegen auf einer – etwas kleineren – Sphäre, da alle Kanten gleich lang sein sollen. Dann müssen auch die Flächenmittelpunkte gleicher – regelmäßiger – Flächen auf je einer Sphäre liegen. Verbinden wir nun den Polyedermittelpunkt mit allen Ecken, dann erhalten wir Pyramiden, deren Grundflächen die jeweiligen Flächen des Polyeders sind. Pyramiden mit gleichen Flächen sind dann auch gleich, insbesondere die Keilwinkel zwischen 3-eckigen (unregelmäßigen) Seitenflächen und den p -Ecken als Grundflächen der Pyramide. Stoßen also im Polyeder ein 3-Eck mit einem p -Eck zusammen, so beträgt der Keilwinkel genau die Summe der Keilwinkel der jeweiligen Pyramiden. Somit können keine verschiedenen Keilwinkel zwischen zwei beliebigen benachbarten 3-Ecken bzw. zwischen 3- und p -Ecken vorkommen.

3.4.1 Der schräge Hexaeder

Zum Berechnen der Keilwinkel im schrägen Hexaeder werden die Koordinaten eines (und durch Permutation aller) Ecken berechnet. Dabei wird der $(3,3,3,3,4)$ in einen passenden Hexaeder so hineingelegt, dass die 4-Ecke des $(3,3,3,3,4)$ auf den Flächen des $(4,4,4)$ liegen. Jetzt wird die Kantenlänge k des umschriebenen Hexaeders auf 1 gesetzt. Dann sind die Ecken $A = (x; y; 1)^t$, $B = (y; -x; 1)^t$, $C = (1; x; y)^t$, $D = (1; -y; x)^t$ und $E = (y; 1; x)^t$, ein Flächenmittelpunkt $M = (0; 0; 1)^t$.



Daraus lassen sich die folgenden Kantenlängen berechnen:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (x - y)^2 + (-x - y)^2 + (1 - 1)^2 = 2x^2 + 2y^2 \\ \overline{AC}^2 &= (1 - x)^2 + (x - y)^2 + (y - 1)^2 \\ &= 2 + 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y \\ \overline{BC}^2 &= (1 - y)^2 + (x + x)^2 + (y - 1)^2 = 2 + 4x^2 + 2y^2 - 4y \\ \overline{BD}^2 &= (1 - y)^2 + (-y + x)^2 + (x - 1)^2 = 2 + 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y \\ &= \overline{AC}^2 \\ \overline{CD}^2 &= (1 - 1)^2 + (-y - x)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2 \\ &= \overline{AB}^2\end{aligned}$$

Nun muss die Bedingung angewendet werden, dass im schrägen Hexaeder alle Kanten gleich lang sind. Also setzen wir die Kantenlängen gleich und bestimmen die Variablen x und y :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \implies xy + x + y = 1 \implies x = \frac{1 - y}{1 + y}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \implies 2y = 1 + x^2 \implies x = \sqrt{2y - 1}$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir die kubische Gleichung

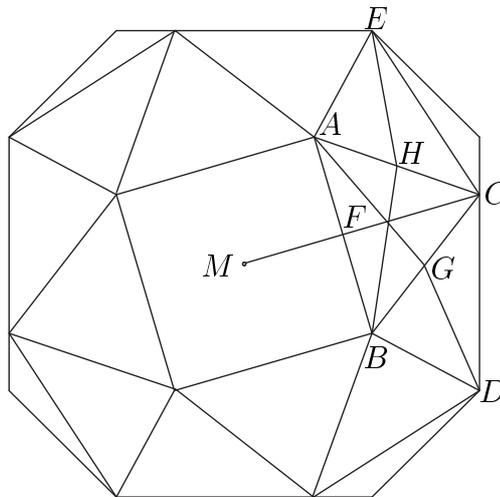
$$\begin{aligned} \frac{(1-y)^2}{(1+y)^2} = 2y-1 &\Rightarrow 1-2y+y^2 = (2y-1)(1+2y+y^2) \\ &\Rightarrow 1-2y+y^2 = 2y+4y^2+2y^3-1-2y-y^2 \\ &\Rightarrow 2-2y-2y^2-2y^3 = 0 \\ &\Rightarrow y^3+y^2+y-1 = 0 \end{aligned}$$

Diese kubische Gleichung in Normalform wird durch Substitution $y = z - \frac{1}{3}$ in die reduzierte Form $(z - \frac{1}{3})^3 + (z - \frac{1}{3})^2 + z - \frac{1}{3} - 1 = 0 \Rightarrow z^3 + \frac{2}{3}z - \frac{34}{27} = 0$ überführt. Mit Hilfe der Cardanischen Lösungsformel für $z^3 + 3pz + 2q = 0$ lösen wir mit $p = \frac{2}{9}$ und $q = -\frac{17}{27}$ und der Diskriminanten $d = p^3 + q^2 = \frac{297}{729}$ auf zu:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-q + \sqrt{d}} = \sqrt[3]{\frac{17}{27} + \frac{3}{27}\sqrt{33}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} = 1.08233900021435710 \\ v &= \sqrt[3]{-q - \sqrt{d}} = \sqrt[3]{\frac{17}{27} - \frac{3}{27}\sqrt{33}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{17 - 3\sqrt{33}} = -0.20531665418894740 \end{aligned}$$

Nun ist $z = u + v = 0.87702234602540970$ und somit folgt für die beiden Variablen $y = 0.54368901269207637$ und $x = 0.29559774252208480$.

Mit den Werten für x und y lassen sich nun die Kantenmittelpunkte F (zwischen A und B), G (zwischen B und C) und H (zwischen A und C) berechnen. Anhand der Koordinaten können wir nun die Richtungsvektoren von den Kantenmittelpunkten auf die Flächen bestimmen und dann mit $\cos \alpha = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{ab}|}$ die Keilwinkel zwischen den verschiedenen Flächen berechnen.



$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ x \end{pmatrix}, \\
E &= \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = \frac{A+B}{2} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
G &= \frac{B+C}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1+y}{2} \\ 0 \\ \frac{1+y}{2} \end{pmatrix}, \quad H = \frac{A+C}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1+x}{2} \\ \frac{x+y}{2} \\ \frac{1+y}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Das liefert die Richtungsvektoren

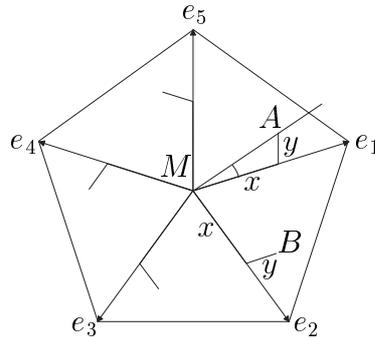
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FM} &= \left(\frac{1}{2}(-x-y); \frac{1}{2}(x-y); 0 \right)^t, \\
\overrightarrow{FC} &= \left(\frac{1}{2}(2-x-y); \frac{1}{2}(3x-y); y-1 \right)^t, \quad \overrightarrow{GA} = \left(\frac{1}{2}(2x-y-1); y; \frac{1}{2}(1-y) \right)^t, \\
\overrightarrow{GD} &= \left(\frac{1}{2}(1-y); -y; \frac{1}{2}(2x-y-1) \right)^t, \\
\overrightarrow{HB} &= \left(\frac{1}{2}(2y-x-1); \frac{1}{2}(-3x-y); \frac{1}{2}(1-y) \right)^t \quad \text{und} \\
\overrightarrow{HE} &= \left(\frac{1}{2}(2y-x-1); \frac{1}{2}(2-x-y); \frac{1}{2}(2x-y-1) \right)^t,
\end{aligned}$$

woraus die Keilwinkel an F von $2.49553163057773343=0.79435238929724788 \pi$, an G von $2.67444808353522868=0.85130326507455573 \pi$ und an H von ebenfalls 2.67444808353522868 folgen.

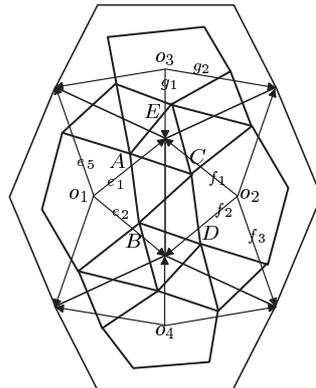
3.4.2 Der schräge Dodekaeder

Auch beim schrägen Dodekaeder verfolgen wir eine ähnliche Strategie; wir betten den $(3,3,3,3,5)$ so in einen Dodekaeder ein, dass die 5-Ecke aufeinander liegen. Setzen wir o.B.d.A. die Länge einer Diagonale eines 5-Ecks des Dodekaeders auf zwei, dann liegen acht Ecken des Dodekaeders auf dem Hexaeder, den wir schon für die Berechnung des schrägen Hexaeders gebraucht haben. Genauer sind die Ecken des Dodekaeders $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ und $(\pm \tau, \pm(1+\tau), 0)$ mit geraden Permutationen⁴. Nun suchen wir auf jedem 5-Eck ein kleineres, gedrehtes 5-Eck bzw. dessen Eckkoordinaten. Aus diesen können wir dann wieder über $\cos \alpha = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{ab}|}$ die Keilwinkel zwischen den Flächen berechnen.

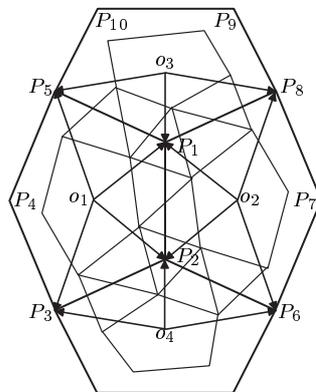
⁴ $\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ist die Goldene Schnittzahl.



Da die Kanten des Dodekaeders nicht senkrecht zueinander sind, müssen wir x und y im Gegensatz zum schrägen Hexaeder etwas umständlicher bestimmen. Sei M der Mittelpunkt eines 5-Ecks und e_1 bis e_5 die Vektoren von M zu den Ecken. Dann lassen sich die fünf Ecken eines 5-Ecks des schrägen Dodekaeders so mit x und y darstellen, dass die jeweiligen Ecken Linearkombinationen der Vektoren e_j , die hier als Einheitsvektoren fungieren, und x und y deren „Koordinatenwerte“ sind. Hier wären $A = M + xe_1 + ye_5$ und $B = M + xe_2 + ye_1$.



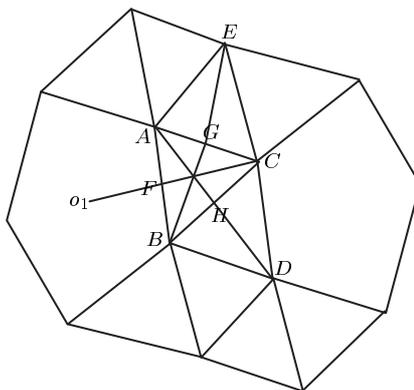
Hieraus folgt eine Darstellung einiger wichtiger Ecken des schrägen Dodekaeders durch x und y : $A = o_1 + xe_1 + ye_5$, $B = o_1 + xe_2 + ye_1$, $C = o_2 + xf_1 + yf_2$, $D = o_2 + xf_2 + yf_3$ und $E = o_3 + xg_1 + yg_2$.



Mit $P_1 = (o; \tau; 1 + \tau)^t$, $P_2 = (0; -\tau; 1 + \tau)^t$, $P_3 = (-1; -1; 1)^t$, $P_4 = (-1 - \tau; 0; \tau)^t$, $P_5 = (-1; 1; 1)^t$, $P_6 = (1; -1; 1)^t$, $P_7 = (1 + \tau; 0; \tau)^t$, $P_8 = (1; 1; 1)^t$, $P_9 = (\tau; \tau + 1; 0)^t$ und $P_{10} = (-\tau; \tau + 1; 0)^t$ ($\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$) können alle „Einheitsvektoren“ berechnet werden:

$$\begin{aligned} o_1 &= \left(\frac{-3 - \tau}{5}; 0; \frac{4 + 3\tau}{5} \right)^t & o_2 &= \left(\frac{3 + \tau}{5}; 0; \frac{4 + 3\tau}{5} \right)^t \\ o_3 &= \left(0; \frac{4 + 3\tau}{5}; \frac{3 + \tau}{5} \right)^t & & \\ & \implies & & \\ e_1 = \overrightarrow{o_1 P_1} &= \left(\frac{3 + \tau}{5}; \tau; \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^t & e_2 = \overrightarrow{o_1 P_2} &= \left(\frac{3 + \tau}{5}; -\tau; \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^t \\ e_5 = \overrightarrow{o_1 P_5} &= \left(\frac{\tau - 2}{5}; 1; \frac{1 - 3\tau}{5} \right)^t & f_1 = \overrightarrow{o_2 P_1} &= \left(\frac{-3 - \tau}{5}; \tau; \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^t \\ f_2 = \overrightarrow{o_2 P_2} &= \left(\frac{-3 - \tau}{5}; -\tau; \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^t & f_3 = \overrightarrow{o_2 P_6} &= \left(\frac{2 - \tau}{5}; -1; \frac{1 - 3\tau}{5} \right)^t \\ g_1 = \overrightarrow{o_3 P_1} &= \left(0; \frac{2\tau - 4}{5}; \frac{2 + 4\tau}{5} \right)^t & g_2 = \overrightarrow{o_3 P_8} &= \left(1; \frac{1 - 3\tau}{5}; \frac{2 - \tau}{5} \right)^t \end{aligned}$$

Jetzt können die Punkte A , B und C durch x und y ausgedrückt werden. Die Kantenlängen \overline{AB} , \overline{AC} und \overline{BC} müssen gleich sein. Durch Gleichsetzen der Quadrate der Kantenlängen, Lösen der Gleichungen und Ausschließen der negativen und komplexen Lösungen bekommen wir die Koordinatenwerte $x = 0.50606254696601833$ und $y = 0.13402659372916743$ (siehe Seite 153).



Mit den Kantenmittelpunkten F (zwischen A und B), G (zwischen A und C) und H (zwischen B und C) lassen sich die Vektoren auf den Flächen senkrecht zu den Kanten und daraus der Winkel zwischen den Vektoren bestimmen. Zwischen einem 5-Eck und einem angrenzenden 3-Eck beträgt der Winkel $2.66913063362575611 = 0.84961066819908350 \pi$, zwischen zwei 3-Ecken $2.86540068834472861 = 0.91208536697796601 \pi$.

3.5 Zusammenfassung

Somit sind alle Keilwinkel der in Frage kommenden Polyeder bestimmt. Nach dem Sortieren nach Größe bekommen wir folgende Tabelle:

Konfig.	Eck	Eck	Winkel in π	Polyeder
(4,4,3)	4	4	0.3333333333333333	3-Prisma
(3,3,3)	3	3	0.39182655203060727	Tetraeder
(6,6,3)	6	6	0.39182655203060727	stumpfer Tetraeder
(3,4,4)	3	4	0.5000000000000000	3-Prisma
(4,4,4)	4	4	0.5000000000000000	Hexaeder
(5,4,4)	5	4	0.5000000000000000	5-Prisma
(6,4,4)	6	4	0.5000000000000000	6-Prisma
(7,4,4)	7	4	0.5000000000000000	7-Prisma
(8,4,4)	8	4	0.5000000000000000	8-Prisma
(9,4,4)	9	4	0.5000000000000000	9-Prisma
(10,4,4)	10	4	0.5000000000000000	10-Prisma
(11,4,4)	11	4	0.5000000000000000	11-Prisma
(12,4,4)	12	4	0.5000000000000000	12-Prisma
(13,4,4)	13	4	0.5000000000000000	13-Prisma
(14,4,4)	14	4	0.5000000000000000	14-Prisma
(8,8,3)	8	8	0.5000000000000000	stumpfer Hexaeder
(3,14,3,3)	3	14	0.52072124784978105	14-Antiprisma
(3,13,3,3)	3	13	0.52233280033885968	13-Antiprisma
(3,12,3,3)	3	12	0.52421796670086522	12-Antiprisma
(3,11,3,3)	3	11	0.52645348284282490	11-Antiprisma
(3,10,3,3)	3	10	0.52914802486924264	10-Antiprisma
(3,9,3,3)	3	9	0.53246095481441045	9-Antiprisma
(3,8,3,3)	3	8	0.53663621231196770	8-Antiprisma
(3,7,3,3)	3	7	0.54206809759401324	7-Antiprisma
(3,6,3,3)	3	6	0.54944127155450689	6-Antiprisma
(3,5,3,3)	3	5	0.56006842757539837	5-Antiprisma
(3,4,3,3)	3	4	0.57686755821809152	4-Antiprisma
(4,4,5)	4	4	0.6000000000000000	5-Prisma
(3,3,3,3)	3	3	0.60817344796939273	Oktaeder
(3,6,6)	3	6	0.60817344796939273	stumpfer Tetraeder
(6,6,4)	6	6	0.60817344796939273	stumpfer Oktaeder
(5,5,5)	5	5	0.64758361765043327	Dodekaeder
(10,10,3)	10	10	0.64758361765043327	stumpfer Dodekaeder
(4,4,6)	4	4	0.6666666666666667	6-Prisma

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von voriger Seite

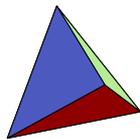
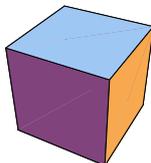
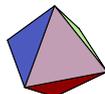
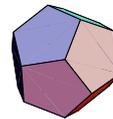
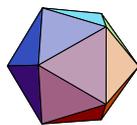
Konfig.	Eck	Eck	Winkel in π	Polyeder
(3,8,8)	3	8	0.69591327601530364	stumpfer Hexaeder
(4,6,6)	4	6	0.69591327601530364	stumpfer Oktaeder
(3,4,3,4)	3	4	0.69591327601530364	Kubo-Oktaeder
(6,8,4)	6	8	0.69591327601530364	großer Rhomben- Kubo-Oktaeder
(3,3,3,4)	3	3	0.70862001614328658	4-Antiprisma
(4,4,7)	4	4	0.71428571428571429	7-Prisma
(4,4,3,4)	4	4	0.75000000000000000	Rhomben- Kubo-Oktaeder
(4,8,6)	4	8	0.75000000000000000	großer Rhomben- Kubo-Oktaeder
(4,4,8)	4	4	0.75000000000000000	8-Prisma
(3,3,3,3,3)	3	3	0.76772047280123001	Ikosaeder
(3,3,3,5)	3	3	0.76772047280123001	5-Antiprisma
(6,6,5)	6	6	0.76772047280123001	stumpfer Ikosaeder
(4,4,9)	4	4	0.77777777777777778	9-Prisma
(3,10,10)	3	10	0.79234795477416836	stumpfer Dodekaeder
(5,6,6)	5	6	0.79234795477416836	stumpfer Ikosaeder
(3,5,3,5)	3	5	0.79234795477416836	Ikosi-Dodekaeder
(6,10,4)	6	10	0.79234795477416836	großer Rhomben- Ikosi-Dodekaeder
(3,4,3,3,3)	3	4	0.79435238929724788	schräger Hexaeder
(4,4,10)	4	4	0.80000000000000000	10-Prisma
(3,4,4,4)	3	4	0.80408672398469637	Rhomben- Kubo-Oktaeder
(4,6,8)	4	6	0.80408672398469637	großer Rhomben- Kubo-Oktaeder
(3,3,3,6)	3	3	0.80678828517724062	6-Antiprisma
(4,4,11)	4	4	0.81818181818181818	11-Prisma
(4,5,4,3)	4	5	0.82379180882521664	Rhomben- Ikosi-Dodekaeder
(4,10,6)	4	10	0.82379180882521664	großer Rhomben- Ikosi-Dodekaeder
(4,4,12)	4	4	0.83333333333333333	12-Prisma
(3,3,3,7)	3	3	0.83456812595788539	7-Antiprisma
(4,4,13)	4	4	0.84615384615384615	13-Prisma
(3,5,3,3,3)	3	5	0.84961066819908350	schräger Dodekaeder
(3,3,3,3,4)	3	3	0.85130326507455573	schräger Hexaeder

Fortführung auf folgender Seite

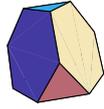
Fortführung von voriger Seite

Konfig.	Eck	Eck	Winkel in π	Polyeder
(3,3,3,8)	3	3	0.85534657160805150	8-Antiprisma
(4,4,14)	4	4	0.85714285714285714	14-Prisma
(3,3,3,9)	3	3	0.87147910908580449	9-Antiprisma
(4,6,10)	4	6	0.88386023640061501	großer Rhomben- Ikosi-Dodekaeder
(3,4,5,4)	3	4	0.88386023640061501	Rhomben- Ikosi-Dodekaeder
(3,3,3,10)	3	3	0.88436948151897343	10-Antiprisma
(3,3,3,11)	3	3	0.89490695226159224	11-Antiprisma
(3,3,3,12)	3	3	0.90368248334127800	12-Antiprisma
(3,3,3,13)	3	3	0.91110425250069535	13-Antiprisma
(3,3,3,3,5)	3	3	0.91208536697796601	schräger Dodekaeder
(3,3,3,14)	3	3	0.91746330402035646	14-Antiprisma

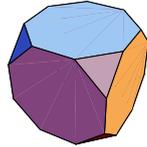
Die Platonischen Polyeder

(3,3,3)
Tetraeder(4,4,4)
Hexaeder(3,3,3,3)
Oktaeder(5,5,5)
Dodekaeder(3,3,3,3,3)
Ikosaeder

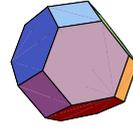
Die Archimedischen Polyeder



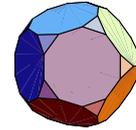
(3,6,6)
stumpfer
Tetraeder



(3,8,8)
stumpfer
Hexaeder



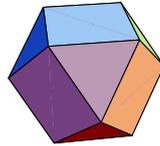
(4,6,6)
stumpfer
Oktaeder



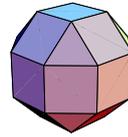
(3,10,10)
stumpfer
Dodekaeder



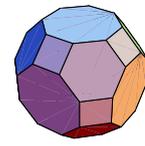
(5,6,6)
stumpfer
Ikosaeder



(3,4,3,4)
Kubo-
Oktaeder



(3,4,4,4)
Rhomben-
Kubo-Oktaeder



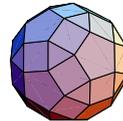
(4,6,8)
großer Rhomben-
Kubo-Oktaeder



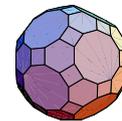
(3,3,3,3,4)
schräger
Hexaeder



(3,5,3,5)
Ikosi-
Dodekaeder



(3,4,5,4)
Rhomben-
Ikosi-Dodekaeder

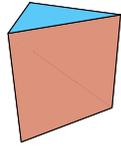


(4,6,10)
großer Rhomben-
Ikosi-Dodekaeder

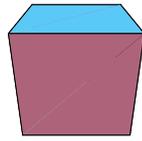


(3,3,3,3,5)
schräger
Dodekaeder

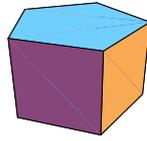
Die Prismen



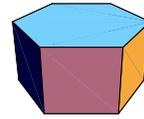
(3,4,4)
3-Prisma



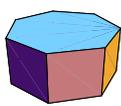
(4,4,4)
4-Prisma



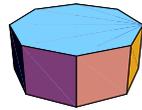
(5,4,4)
5-Prisma



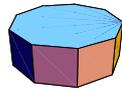
(6,4,4)
6-Prisma



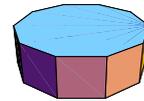
(7,4,4)
7-Prisma



(8,4,4)
8-Prisma

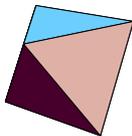


(9,4,4)
9-Prisma

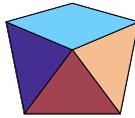


(10,4,4)
10-Prisma

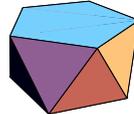
Die Antiprismen



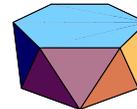
(3,3,3,3)
3-Anti-
Prisma



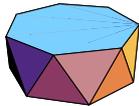
(3,3,3,4)
4-Anti-
Prisma



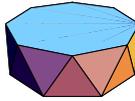
(3,3,3,5)
5-Anti-
Prisma



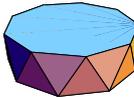
(3,3,3,6)
6-Anti-
Prisma



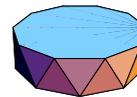
(3,3,3,7)
7-Anti-
Prisma



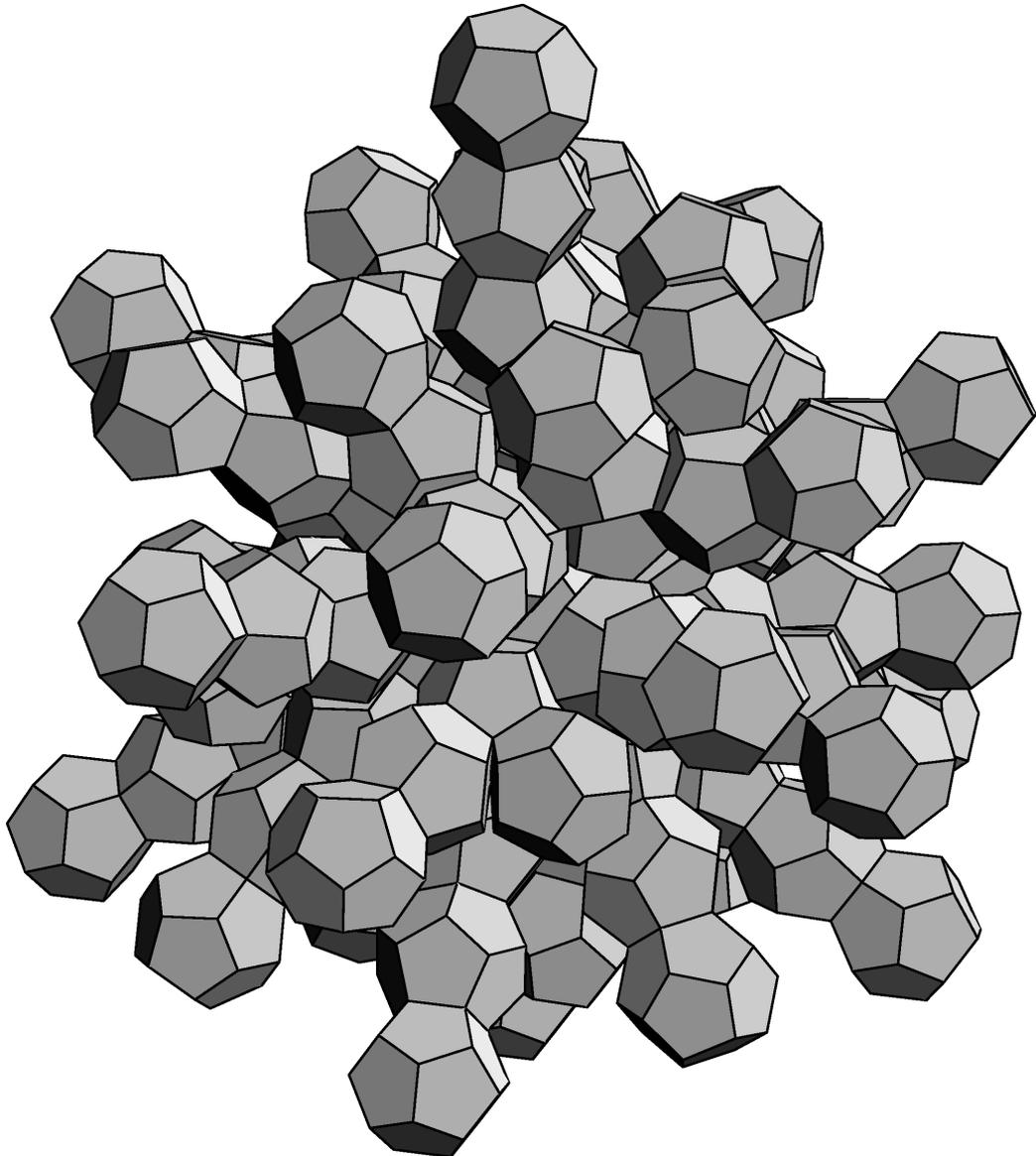
(3,3,3,8)
8-Anti-
Prisma



(3,3,3,9)
9-Anti-
Prisma



(3,3,3,10)
10-Anti-
Prisma

120-Zeller ⁵

⁵Abwicklung; aus [25]

Kapitel 4

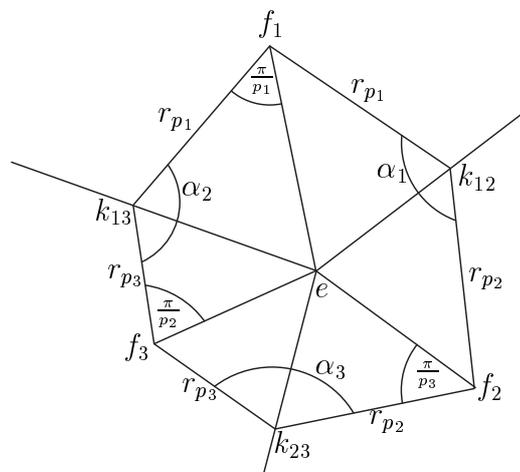
Radien der Polyeder

„Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken.“

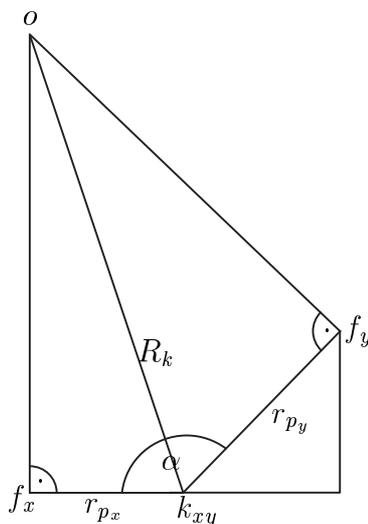
David Hilbert

In diesem Abschnitt sollen die Radien der Sphären bestimmt werden, die die betrachteten Polyeder umschreiben. Da wir Transitivität in den Ecken voraussetzen, ist es offensichtlich, dass alle Ecken auf einer Sphäre mit Radius R_0 liegen müssen. Des Weiteren sollen alle Kanten gleich lang (o.B.d.A. =1) sein. Also müssen auch alle Kantenmittelpunkte auf einer (etwas kleineren) Sphäre mit Radius R_1 liegen.

Für die Flächenmittelpunkte gilt dies allerdings nicht, da die betrachteten Polyeder aus verschiedenen Flächen aufgebaut sind. Natürlich müssen aber die Mittelpunkte gleicher Flächen (z.B. p -Ecke) auf einer Sphäre mit Radius $R_{2,p}$ liegen.



Seien um eine Ecke e mit drei Flächen (p_1 -Eck, p_2 -Eck, p_3 -Eck) die Flächenmittelpunkte f_1, f_2 und f_3 , die Kantenmittelpunkte k_{12}, k_{13} und k_{23} mit den Keilwinkeln α_1 an k_{12} , α_2 an k_{13} und α_3 an k_{23} gegeben. Außerdem seien dann noch die Winkel $\frac{\pi}{p_1}, \frac{\pi}{p_2}$ und $\frac{\pi}{p_3}$ an den Flächenmittelpunkten und die Radien r_{p_1}, r_{p_2} und r_{p_3} zu den entsprechenden Kantenmittelpunkten auf den Flächen gegeben. Dann folgen aus dem Kapitel 3.3 (Seite 14) die Radien r_{p_x} für die p_x -Ecken: Mit Kantenlänge o.B.d.A. =1 ist $r_{p_x} = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{p_x}$. Wir erhalten unregelmäßige 4-Ecke o, f_x, k_{xy}, f_y mit rechten Winkeln an f_x und f_y und mit Polyedermittelpunkt o .



Gesucht ist der Radius von R_k von o nach k_{xy} . In einer geeignet gewählten Koordinatenebene bekommt f_x die Koordinaten $(0; 0)^t$, $k_{xy} := (0; r_{p_x})^t$, $f_y := (r_{p_y} \sin \alpha; r_{p_x} - r_{p_y} \cos \alpha)^t$ und $o := (a; 0)^t$. Die Geraden durch f_x und o und durch f_y und o werden geschnitten und wir erhalten das Gleichungssystem $a = r_{p_y} \sin \alpha - t \cos \alpha$, $0 = r_{p_x} - r_{p_y} \cos \alpha - t \sin \alpha \implies t = \frac{r_{p_x} - r_{p_y} \cos \alpha}{\sin \alpha} \implies a = r_{p_y} \sin \alpha - (r_{p_x} - r_{p_y} \cos \alpha) \cot \alpha$. Dann folgt der Radius $R_k = \sqrt{r_{p_x}^2 + a^2}$ und mit der Kantenlänge (hier =1) sofort der Radius $R_e = \sqrt{R_k^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{r_{p_x}^2 + a^2 + \frac{1}{4}}$ der Sphäre, die den Polyeder umschreibt.

Für die Radien R_{f_x} der Sphären, die durch die Flächenmittelpunkte der Flächen f_x gehen, bekommen wir $R_{f_x} = \sqrt{R_k^2 - r_{p_x}^2} = r_{p_y} \sin \alpha - (r_{p_x} - r_{p_y} \cos \alpha) \cot \alpha = a$, also genau das oben gefundene a (mit der richtigen Indizierung x und y).

Es stellt sich die Frage, ob der erhaltene Radius von der Wahl der Indizes, d.h. von der Wahl der Reihenfolge der Flächen f_x und f_y , abhängt. Dies kann verneint werden, da die Bedingungen der Rechtwinkligkeit in all diese

unregelmäßigen 4-Ecke einfließen und die Keilwinkel in ihnen von der gesamten Umgebung der Ecke abhängen. Durch Festlegung der Flächentypen um eine Ecke bekommen wir also feste Keilwinkel und einen festen Radius.

Alle diese Überlegungen haben wir für eine Ecke e mit drei Flächen gemacht. Es ist allerdings klar, dass wir genau die gleichen unregelmäßigen 4-Ecke auch bei Ecken mit vier oder fünf Flächen erhalten. Wir können also die im vorigen Kapitel errechneten Keilwinkel zusammen mit den Inradien der entsprechenden Flächen (hier für Kantenlänge=1) einsetzen.

p	$r_p = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{p}$	p	$r_p = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{p}$
3	0.28867513459481288	9	1.37373870972731114
4	0.5	10	1.53884176958762670
5	0.68819096023558677	11	1.70284361944462500
6	0.86602540378443865	12	1.86602540378443865
7	1.03826069828616828	13	2.02857974281905823
8	1.20710678118654752	14	2.19064313376741154

Dann erhalten wir sofort die Radien der Sphären, die durch die Ecken (R_e), durch die Kantenmittelpunkte (R_k) und durch die Flächenmittelpunkte der kleineren ($R_{f_{\text{klein}}}$), der mittleren ($R_{f_{\text{mittel}}}$) und der größeren Flächen ($R_{f_{\text{groß}}}$) gehen.

Konfig.	R_e	$R_{f_{\text{klein}}}$	$R_{f_{\text{mittel}}}$	$R_{f_{\text{groß}}}$
(3,3,3)	0.61237243569579243	0.20412414523192522		
(4,4,4)	0.86602540378443865	0.5		
(5,5,5)	1.40125853844407353	1.11351636441160672		
(3,3,3,3)	0.70710678118654753	0.40824829046386303		
(3,3,3,3,3)	0.95105651629515357	0.75576131407617073		
(3,6,6)	1.17260393995585739	1.02062072615965754	0.61237243569579453	
(3,8,8)	1.77882364566392447	1.68252198471216470	1.20710678118654755	
(3,10,10)	2.96944901586339850	2.91278116659641504	2.48989828488278031	
(4,6,6)	1.58113883008418969	1.41421356237309508	1.22474487139158908	
(5,6,6)	2.47801865906761556	2.32743843676632713	2.26728394222851222	
(4,6,8)	2.31761091289276657	2.20710678118654758	2.09077027517602776	1.91421356237309512
(4,6,10)	3.80239449985129373	3.73606797749978984	3.66854248067258589	3.44095480117793401
(3,4,3,4)	1	0.81649658092772603	0.70710678118654752	
(3,5,3,5)	1.61803398874989486	1.51152262815234147	1.37638192047117355	
(3,4,4,4)	1.39896632596590673	1.27427369424830169	1.20710678118654756	
(3,4,5,4)	2.23295050941569013	2.15701985252024436	2.11803398874989493	2.06457288070676039
(3,3,3,3,4)	1.34371337374460172	1.21335580002189233	1.14261350892596212	
(3,3,3,3,5)	2.15583737511563974	2.07708965974320864	1.98091594728184078	

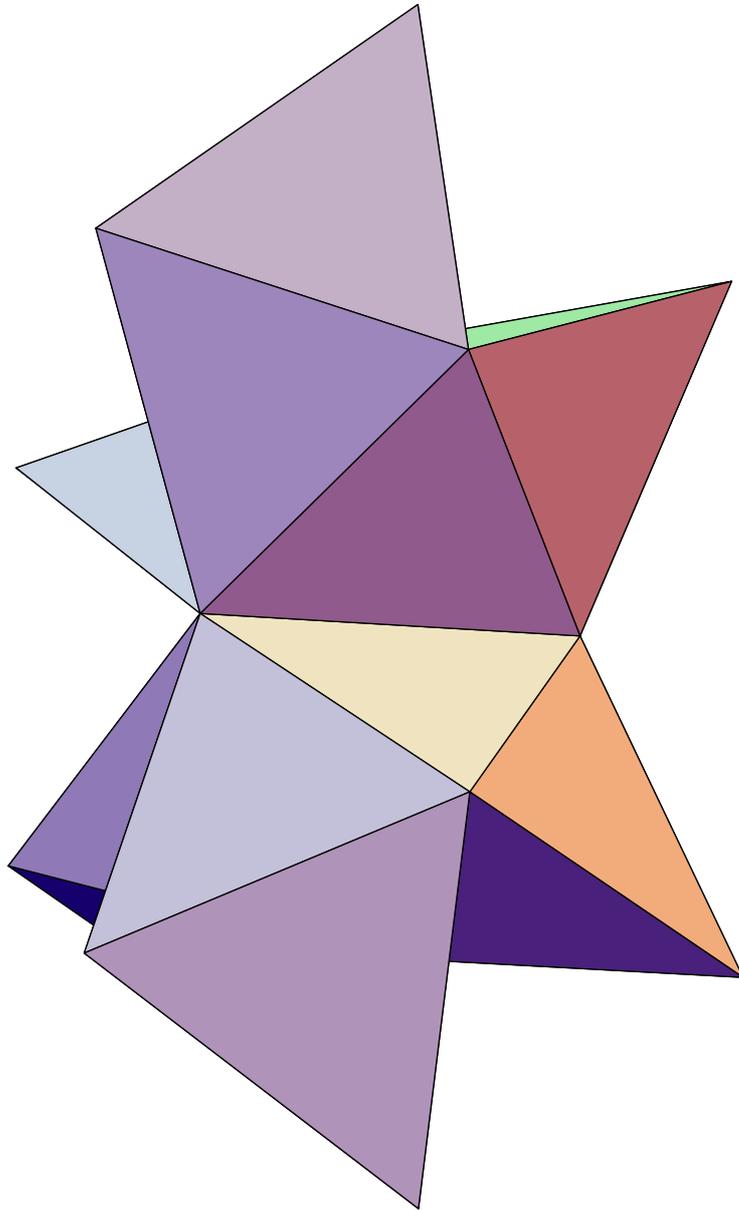
Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von voriger Seite

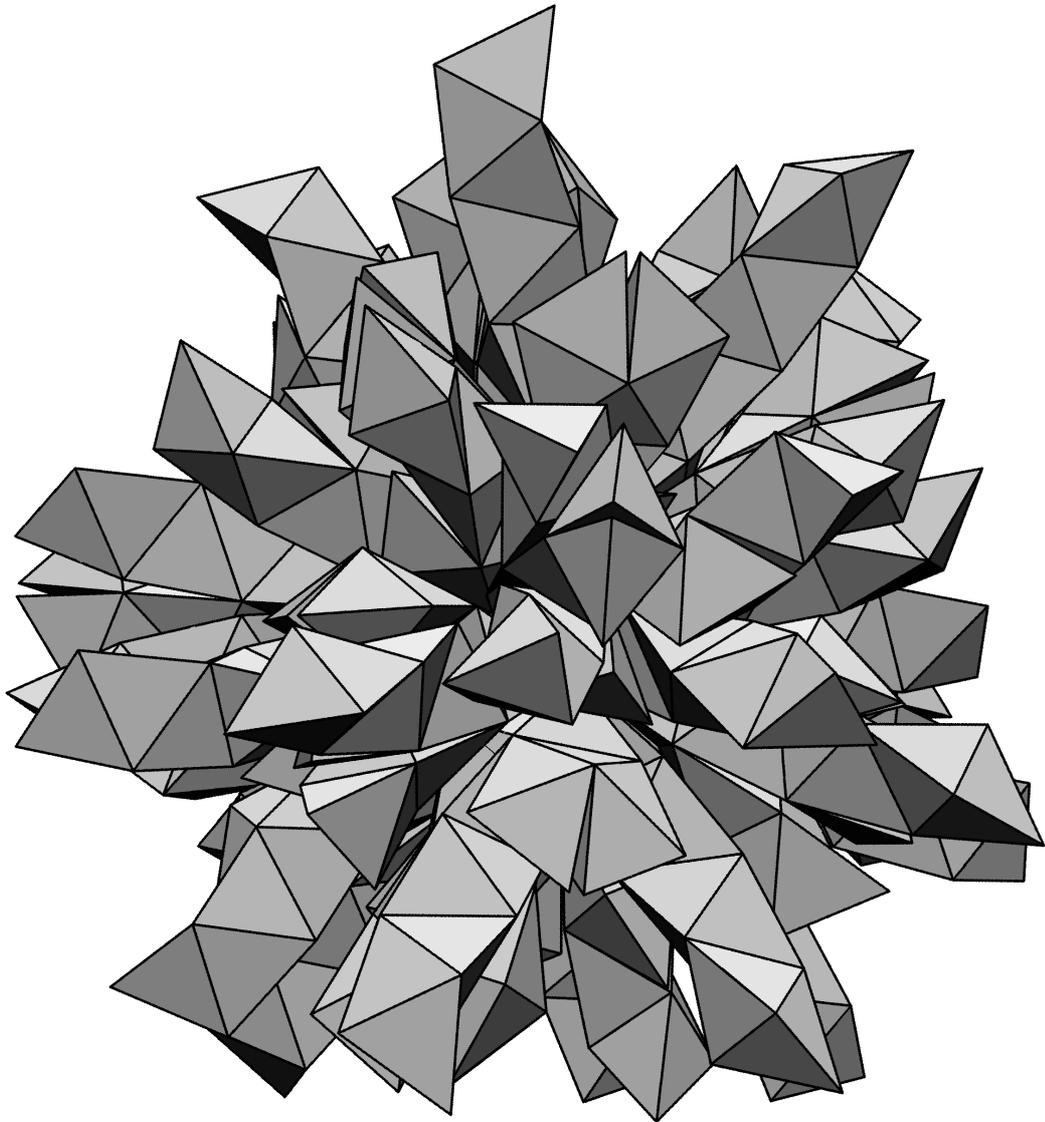
Konfig.	R_e	$R_{f_{\text{klein}}}$	$R_{f_{\text{mittel}}}$
(3,4,4)	0.76376261582597333	0.5	0.28867513459481287
(5,4,4)	0.98671515532598311	0.68819096023558677	0.5
(6,4,4)	1.11803398874989485	0.86602540378443865	0.5
(7,4,4)	1.25617883981767571	1.03826069828616828	0.5
(8,4,4)	1.39896632596590670	1.20710678118654752	0.5
(9,4,4)	1.54504305525873861	1.37373870972731114	0.5
(10,4,4)	1.69352708533105394	1.53884176858762670	0.5
(11,4,4)	1.84382113890780384	1.70284361944462500	0.5
(12,4,4)	1.99550765660492450	1.86602540378443865	0.5
(13,4,4)	2.14828670641882352	2.02857974281905823	0.5
(14,4,4)	2.30193773580483825	2.19064313376741154	0.5
(3,3,3,4)	0.82266438800803629	0.58604040983818134	0.42044820762685727
(3,3,3,5)	0.95105651629515357	0.75576131407617073	0.42532540417601996
(3,3,3,6)	1.08766387358053746	0.92178054251480381	0.42779983858367616
(3,3,3,7)	1.22972734168212116	1.08576977373071269	0.42923659824727737
(3,3,3,8)	1.37554858077350769	1.24851934896287365	0.43014778493148571
(3,3,3,9)	1.52404555126984232	1.41045436261229815	0.43076304361230893
(3,3,3,10)	1.67450474374256028	1.57182467326448472	0.43119850192972914
(3,3,3,11)	1.82644035761348210	1.73278707479768877	0.43151823557758659
(3,3,3,12)	1.97951194333636570	1.89344506138360977	0.43176003316939584
(3,3,3,13)	2.13347470499423421	2.05386975816795680	0.43194738553948704
(3,3,3,14)	2.28814857254958369	2.21411168569414405	0.43209553404124896

Zusammengefasst lässt sich der Radius zum Mittelpunkt eines p -Ecks durch den Radius der Umsphäre R_e einfach darstellen:

$$R_f(p, R_e) = \sqrt{R_e^2 - \frac{1}{4} \csc^2 \frac{\pi}{p}} .$$

16-Zeller⁶

⁶Abwicklung; aus [25]



600-Zeller ⁷

⁷Abwicklung; aus [25]

Kapitel 5

Faltwinkel und Radian im Polychor

„Little, if anything, is gained by representing the fourth Euclidian dimension as time. In fact, this idea, so attractively developed by H. G. Wells in The Time Machine, has led many authors into a serious misconception of the theory of Relativity.“

Donald H.S.M. Coxeter

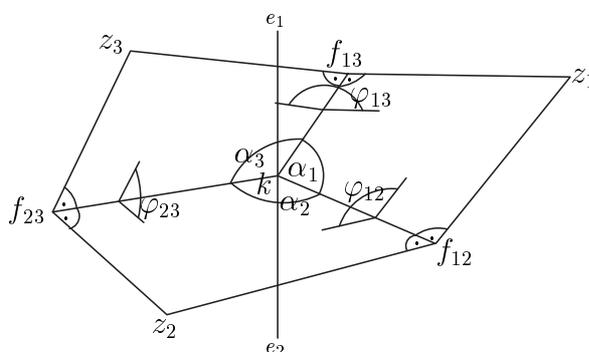
In den gesuchten Polychora stoßen manche Polyeder an Flächen aneinander. Dabei können sie aber nicht auf der gleichen 3-dimensionalen Hyperebene bleiben, sondern müssen sich in die vierte Dimension falten, damit sie auf einer (endlich großen) Sphäre im 4-Dimensionalen liegen. Nun wollen wir diesen Winkel als Faltwinkel zwischen zwei Polyedern bezeichnen. Genauer gesagt ist das der Winkel zwischen den Verbindungsgeraden vom Mittelpunkt der Fläche, an der die zwei Zellen im Polychor zusammenstoßen, zu den Mittelpunkten der beiden Zellen.

Um diesen Winkel zu bestimmen, betrachten wir eine Kante des Polychors und dessen umgebende Zellen z_i . Als Bezugspunkte nehmen wir uns den Kantenmittelpunkt k und die Flächenmittelpunkte f_{ij} zwischen den Zellen z_i und z_j . Die erste Beobachtung, die wir machen, ist der rechte Winkel zwischen der Kante und den Geraden durch die f 's und k . Des Weiteren wissen wir, dass die Lote durch die f 's durch die Mittelpunkte der Polyeder gehen, dass also die Geraden $\overline{z_i f_{ij}}$ und $\overline{f_{ij} k}$ auch senkrecht zueinander sind. Als letztes bemerken wir noch, dass auch die Geraden $\overline{z_i f_{ij}}$ und $\overline{z_i o}$ mit o als Polychormittelpunkt senkrecht aufeinander stehen. Dies wird sofort deutlich, wenn wir die 3-dimensionale Hyperebene einer Zelle mit der 4-dimensionalen Umsphäre des Polychors betrachten.

Außerdem haben wir schon die Keilwinkel aller beteiligten Zellen bestimmt; das sind die Winkel zwischen $\overline{f_{ij}k}$ und $\overline{kf_{jl}}$ am Kantenmittelpunkt k . Auch wollen wir die Faltwinkel zwischen $\overline{z_i f_{ij}}$ und $\overline{f_{ij} z_j}$ bestimmen. Dies ist einfach, wenn nur drei Polyeder um die Kante herum liegen. Bei vier oder fünf Polyedern an der Kante wird die Arbeit wesentlich umfangreicher.

5.1 Drei Polyeder an der Kante

Bei drei Zellen an der Kante können wir uns der bekannten Hilfsmittel aus Kapitel 3.1 ab Seite 11 bedienen.



Dort haben wir den Seitenkosinussatz benutzt, um die Keilwinkel zwischen den Flächen zu berechnen, wenn sich genau drei Flächen um eine Ecke herum befinden. Hier folgen wir genau der gleichen Rechnung. In der 3-dimensionalen Hyperebene (durch k und senkrecht zur Kante) betrachten wir eine Ecke ($=k$) und drei Flächen mit den Flächenwinkeln α_i – deren Winkelsumme muss kleiner als 2π sein, genauso wie die Winkelsumme der Keilwinkel um eine Kante kleiner 2π sein muss – und suchen die Winkel φ_{ij} zwischen den Flächen. Diese entsprechen den gesuchten Faltwinkeln zwischen den Polyedern. Im Anhang C.2 ab Seite 175 wird diese Tatsache noch einmal genauer betrachtet.

Folglich sind die Faltwinkel gegeben durch:

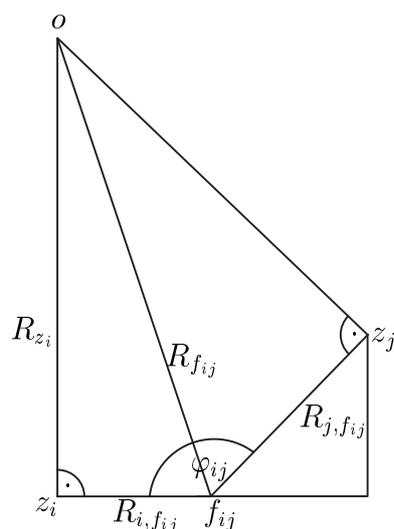
$\cos \alpha_i = \cos \alpha_j \cos \alpha_k + \sin \alpha_j \sin \alpha_k \cos \varphi_{jk}$, bzw.

$$\varphi_{12} = \arccos\left(\frac{\cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}\right),$$

$$\varphi_{13} = \arccos\left(\frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_3}\right),$$

$$\varphi_{23} = \arccos\left(\frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_3}\right).$$

Mit diesen Faltwinkeln (und den Radien aus Kapitel 4) können wir nun auch die Radien der verschiedenen Sphären eines möglichen Polychors berechnen. Dabei betrachten wir, analog zu Seite 30, wieder das allgemeine 4-Eck, dass von z_i , f_{ij} , z_j und o gebildet wird.



Auch hier beobachten wir, dass die Winkel an den z 's senkrecht sind. Die Radien $R_{i,f_{ij}}$ sind hier die in Kapitel 4 berechneten Radien in den Polyedern z_i zu den Flächenmittelpunkten der Flächen f_{ij} .

Wir bekommen also die Formeln für die Polychorradien ($r_{p_{f_{ij}}}$ sind die Inradien der Fläche f_{ij}):

$$R_{z_i} = R_{j,f_{ij}} \sin \varphi_{ij} - (R_{i,f_{ij}} - R_{j,f_{ij}} \cos \varphi_{ij}) \cot \varphi_{ij}$$

zu den Polyedernmittelpunkten z_i ,

$$R_{f_{ij}} = \sqrt{R_{z_i}^2 + R_{i,f_{ij}}^2}$$

zu den Flächenmittelpunkten f_{ij} ,

$$R_k = \sqrt{R_{f_{ij}}^2 + r_{p_{f_{ij}}}^2}$$

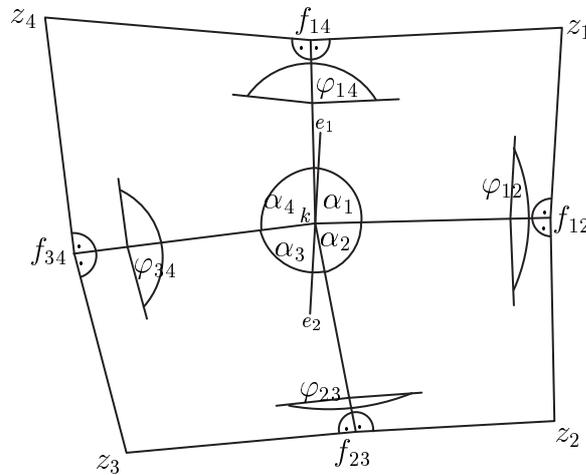
zu den Kantenmittelpunkten k und

$$R_e = \sqrt{R_k^2 + \frac{1}{4}}$$

zu den Polychorecken e .

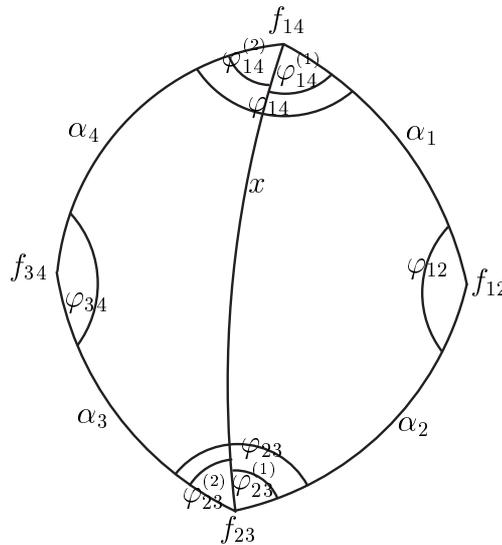
5.2 Vier Polyeder an der Kante

Treten an der Kante vier Zellen auf, dann können wir die Berechnung der Faltwinkel auf das Problem zurückführen, die Winkel eines (unregelmäßigen) sphärischen 4-Ecks zu berechnen, wenn die Kanten bekannt sind. Leider sind die Winkel, anders als beim 3-Eck, dann aber nicht eindeutig bestimmt. Zu gegebenen Kantenlängen können wir beliebig viele mehr oder weniger unregelmäßige sphärische 4-Ecke angeben.



Wir benötigen also mehr Bedingungen, denn es ist leicht einzusehen, dass die gesuchten Faltwinkel eindeutig bestimmt sind (zur Existenz und Eindeutigkeit siehe auch C.3 auf Seite 176). Analog zum vorherigen Fall mit drei Polyedern pro Kante können wir hier auch wieder die 3-dimensionale Hyperebene durch k (und senkrecht zur Kante) betrachten und die Faltwinkel φ als Keilwinkel zwischen den vier entstandenen Flächen (mit Flächenwinkel $\alpha \hat{=} \text{Keilwinkel der Polyeder}$) identifizieren. Da alle Polyederecken auf einer 4-dimensionalen Sphäre um den Polychormittelpunkt liegen müssen, zeigt sich unmittelbar, dass mit dieser Bedingung die Faltwinkel, und damit die Keilwinkel auf der Hyperebene, eindeutig bestimmt sind.

Mit den Keilwinkeln α_1 und α_2 der Polyeder und gegebenem Faltwinkel φ_{12} lassen sich im sphärischen 3-Eck f_{12} , f_{23} , f_{14} (siehe nächste Seite) die dritte Seite x und die beiden Winkel $\varphi_{23}^{(1)}$ und $\varphi_{14}^{(1)}$ bestimmen. Danach können wir im 3-Eck f_{23} , f_{34} , f_{14} mit α_3 , α_4 und x die Winkel φ_{34} , $\varphi_{23}^{(2)}$ und $\varphi_{14}^{(2)}$ errechnen, woraus $\varphi_{23} = \varphi_{23}^{(1)} + \varphi_{23}^{(2)}$ und $\varphi_{14} = \varphi_{14}^{(1)} + \varphi_{14}^{(2)}$ folgen.



Wir können also zu gewähltem φ_{12} die anderen Faltwinkel φ_{ij} bestimmen. Und zu jedem der vier Faltwinkel lassen sich im unregelmäßigen 4-Eck z_i, f_{ij}, z_j, o (mit dem Faltwinkel φ_{ij} bei f_{ij} , siehe auch Seite 37) ein Radius R_e bestimmen, der zu einer möglichen Umsphäre mit diesem Faltwinkel und diesen Zellen gehört. Wir erhalten also zu gewähltem φ_{12} vier Radien, die nur dann gleich sind, wenn φ_{12} den gesuchten Wert hat.

Wir können also aus diesen Überlegungen ein Iterationsverfahren herleiten: Startwert sei ein beliebiges $\varphi_{12,0}$, z.B. 0.8π . Zu gegebenem $\varphi_{12,n}$ bestimmen wir $x_n, \varphi_{23,n}^{(1)}$ und $\varphi_{14,n}^{(1)}$, dann $\varphi_{34,n}, \varphi_{23,n}^{(2)}$ und $\varphi_{14,n}^{(2)}$, daraus $\varphi_{23,n}$ und $\varphi_{14,n}$. Damit folgen dann $R_{12,n}, R_{23,n}, R_{34,n}$ und $R_{14,n}$. Ist $R_{12,n}$ kleiner als $R_{23,n}$, dann wird $\varphi_{12,n+1}$ etwas größer gewählt als $\varphi_{12,n}$ und umgekehrt.

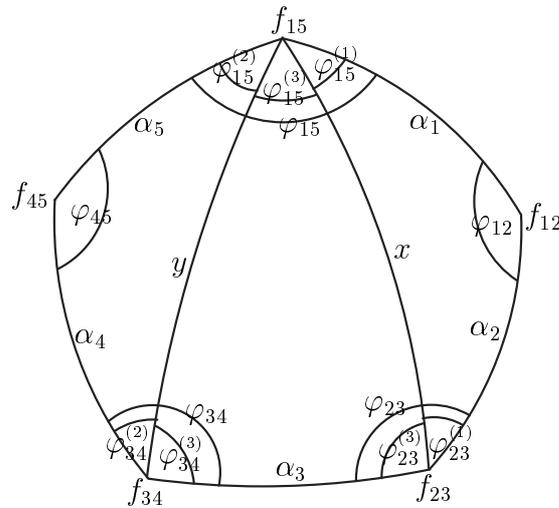
Auf diese Art und Weise können wir die Radien $R_{12,n}$ und $R_{23,n}$ (und damit auch $R_{34,n}$ und $R_{14,n}$) beliebig genau aneinander bringen. Im Anhang sind die Berechnungen als Radien-Programm (ab Seite 156) beschrieben.

5.3 Fünf Polyeder an der Kante

Bei fünf Zellen an der Kante erhalten wir ein unregelmäßiges sphärisches 5-Eck mit bekannten Kanten (die Keilwinkel α_i) und unbekanntem Winkeln (die Faltwinkel φ_{ij}). Auch hier haben wir das Problem, dass die Winkel nicht eindeutig bestimmt sind. Schlimmer noch: selbst wenn wir einen Faltwinkel φ_{12} (wie im vorigen Unterkapitel) vorgeben, ist das System unterbestimmt; wir müssen noch einen weiteren Winkel, z.B. φ_{45} , vorgeben.

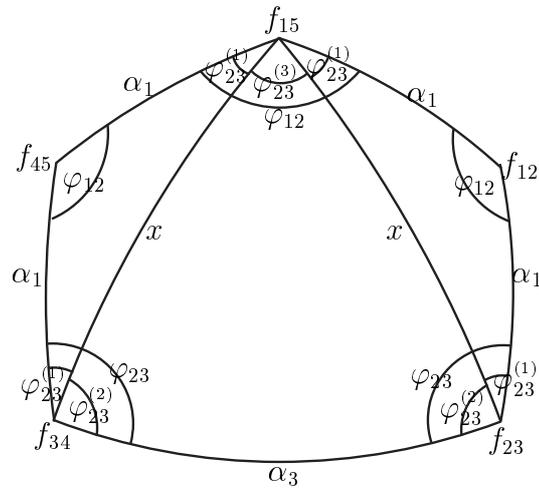
Diese Idee würde zu einem 2-dimensionalen Iterationsverfahren führen, die Bestimmung einer „Iterationsrichtung“ wäre sicher nicht einfach. Deshalb

wollen wir keinen zweiten Faltwinkel vorgeben, sondern diesen in Abhängigkeit vom ersten Winkel φ_{12} bestimmen. Da wir die φ 's derart haben wollen, dass die aus ihnen folgenden Radien der Umsphären gleich sind, berechnen wir aus dem ersten Winkel φ_{12} den Radius und bestimmen φ_{45} , so dass dessen Radius der gleiche ist.

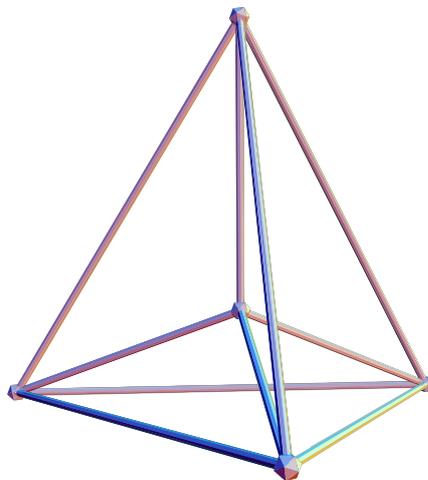


Im unregelmäßigen sphärischen 5-Eck schneiden wir also zwei nicht-benachbarte Ecken (hier bei f_{12} und f_{45}) ab und können die Restwinkel φ_{23} , φ_{34} und φ_{15} in Abhängigkeit von dem Winkel φ_{12} der ersten abgeschnittenen Ecke berechnen. Aus diesen Faltwinkeln folgen dann wieder Radien, die uns sagen, ob φ_{12} zu groß oder zu klein ist, oder ob bei $R_{12} = R_{23} = R_{34} = R_{45} = R_{15}$ φ_{12} genau richtig gewählt wurde.

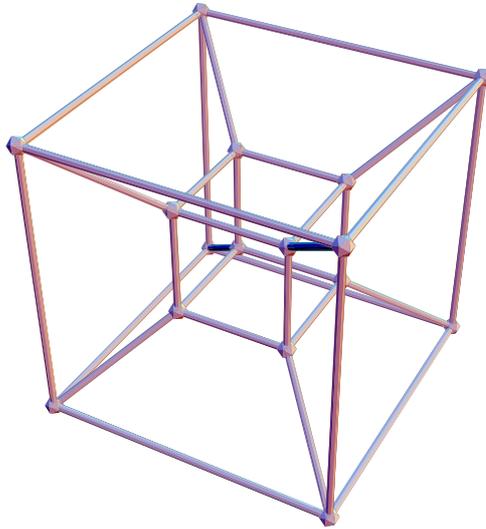
Das hier beschriebene Verfahren eignet sich für allgemeine Umgebungen von fünf Zellen um eine Kante. Es wird sich aber herausstellen, dass kombinatorisch nur solche Umgebungen möglich sind, bei denen mindestens vier Zellen gleich sind. Dies impliziert, dass die Faltwinkel zwischen den gleichen Zellen auch gleich sein müssen. Wir betrachten also unregelmäßige sphärische 5-Ecke, bei denen vier Seiten und die drei Winkel zwischen ihnen gleich groß sind. Außerdem müssen die anderen beiden Winkel aus Symmetriegründen auch gleich groß sein.



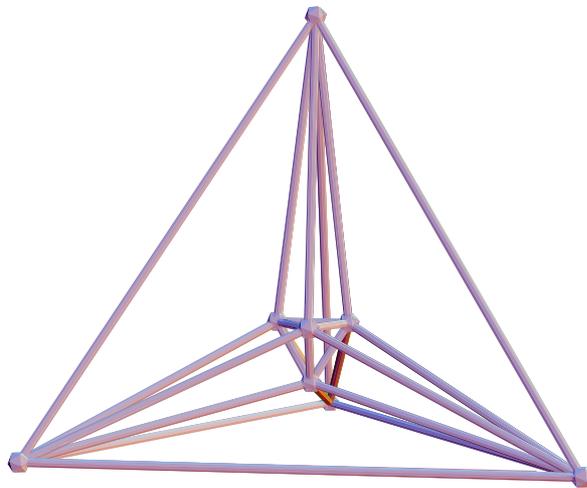
Zu gegebenen φ_{12} (mit einem bestimmten Radius) können wir x und die Winkel $\varphi_{23}^{(1)}$ (im 3-Eck f_{15}, f_{12}, f_{23}) berechnen. Daraus folgen dann über $\varphi_{23}^{(3)} = \varphi_{12} - 2\varphi_{23}^{(1)}$ und $\varphi_{23}^{(2)}$ (im 3-Eck f_{15}, f_{23}, f_{34}) der faltwinkel φ_{23} und ein Radius. Jetzt verändern wir φ_{12} solange, bis die Radien beliebig genau übereinstimmen (siehe auch das Radien-Programm ab Seite 156).



Zentralprojektion des 5-Zellers



Zentralprojektion des 8-Zellers



Zentralprojektion des 16-Zellers

Kapitel 6

Die möglichen Kantenumgebungen

„Mathe ist wie Liebe: Eine einfache Idee, aber sie kann kompliziert werden.“

R. Drabek

Anhand der in den vorigen Kapiteln berechneten Winkel soll nun die Frage behandelt werden, welche möglichen Kantenumgebungen es allein aus kombinatorischen und Keilwinkelsummen-Überlegungen geben kann. Um dies systematisch zu tun, wird zunächst eine willkürliche Reihenfolge der in Frage kommenden Zellen festgelegt. Es liegt nahe, die Reihenfolge zu nehmen, die schon auf Seite 23 bis 25 angegeben wurde: Das Sortieren nach dem Keilwinkel.

Somit suchen wir alle möglichen Kombinationen von Keilwinkeln der Art, dass die jeweiligen Flächen der Keilwinkel aufeinander passen (d.h. vom selben Typ sind) und dass die Winkelsumme der Keilwinkel kleiner als ein Vollkreis ($=2\pi$) bleibt. Dabei sollen natürlich doppelt auftretende Kombinationen eliminiert werden.

6.1 Die Zusammenfassung des Kombinationsprogramms

Betrachten wir den kleinsten möglichen Keilwinkel (beim 3-Prisma), dann ist es offensichtlich, dass wir um eine Kante höchstens fünf Zellen legen können, um die Winkelsumme unter 2π zu halten. Auch ist klar, dass wir mindestens drei Zellen benötigen, um in die vierte Dimension zu stoßen. Wir können also nur drei, vier oder fünf Zellen um eine Kante haben.

Diese Tatsache nutzen wir nun für unser Kombinationsprogramm (ab Seite 167) aus. Zugrunde legen wir eine Liste von k Keilwinkeln, aufsteigend sortiert, und die dazugehörigen Eckenumgebungen der Zellen. Nun identifizieren wir eine Kantenumgebung mit einer fünfstelligen Zahl im k -System, dessen Stellen mit den jeweiligen Keilwinkeln der Liste korrespondieren. Dabei können die beiden höchsten Stellen oder auch nur die höchste Stelle null sein, was identisch ist mit nur drei oder nur vier Zellen um die Kante.

Nun wird diese Zahl systematisch „hochgezählt“, angefangen bei der Zahl $(0\ 0\ 1\ 1\ 1)_k$. Der Anfangswert entspricht der Kantenumgebung (3-Prisma, 3-Prisma, 3-Prisma) jeweils mit 4-Eck auf 4-Eck. Nun wird die erste Stelle nach und nach um eins erhöht und die jeweilige Kombination der Zellen daraufhin überprüft, ob passende Flächen aufeinander fallen. Ist dies der Fall, wird die entsprechende Kantenumgebung in der Ergebnisliste gespeichert. Dieses Hochzählen und Überprüfen wird so lange gemacht, bis die ergebende Keilwinkelsumme nicht mehr kleiner als 2π ist⁸. Damit haben dann natürlich alle Zahlen mit höheren Ziffern an der ersten Stelle noch größere Winkelsummen.

An diesem Punkt setzen wir im Programm die erste Stelle der Zahl wieder auf eins und erhöhen die zweite Stelle um eins. Ist die dazu gehörende Winkelsumme kleiner als $2\pi + F$, dann fangen wir wieder mit dem „Hochzählen“ der ersten Stelle an und überprüfen bei jedem Schritt wieder Flächenübereinstimmung und Winkelsumme. Bei Überschreiten der Winkelsumme wird wieder die erste Stelle auf eins gesetzt und die zweite erhöht. Ist allerdings nach der Erhöhung der zweiten Stelle und des Setzens der ersten auf eins die Winkelsumme schon größer gleich $2\pi + F$, dann ist sie es auch für alle größeren Ziffern an erster oder an zweiter Stelle. Also setzen wir dann gleich die beiden ersten Ziffern auf eins, erhöhen die dritte Ziffer um eins und beginnen wieder mit dem „Hochzählen“ der ersten.

Auf diese Art und Weise erhöhen wir nach und nach die erste, die zweite, die dritte und schließlich auch die vierte und fünfte Ziffer, bis die Keilwinkelsumme größer gleich $2\pi + F$ wird und wir die Zahl nicht mehr erhöhen können.

Nun wird im zweiten Schritt die Ergebnisliste Eintrag für Eintrag dahingehend bearbeitet, dass alle möglichen Kantenumgebungen so eingetragen sind, dass die Keilwinkel mit kleineren Nummern vorn und Keilwinkel mit größeren Nummern weiter hinten stehen. Bei Kantenumgebungen mit drei Zellen ist diese Sortierung eine beliebige Permutation, bei denen mit vier

⁸genauer: kleiner als 2π plus dem maximalen Fehler F der Winkelsummenberechnungen aus den gerundeten Daten; siehe Fehlerabschätzung auf Seite 173.

und fünf Zellen natürlich eine zyklische Vertauschung (zusammen mit dem Umdrehen der Zyklusrichtung). Außerdem werden alle Kombinationen eliminiert, die genau 2π (mit exakter Rechnung) als Winkelsumme haben; dies sind fast alle Kombinationen aus Prismen, z.B. vier Hexaeder oder drei 6-Prismen.

So modifiziert können wir im dritten Schritt alle doppelten Kantenumgebungen eliminieren und den Rest in einer Ergebnisliste (Tabelle 1) abspeichern. Zuletzt berechnen wir für alle Kantenumgebungen die Faltwinkel und Radien und speichern alles nach aufsteigenden Radien der Umsphären in einer Datei ab (Tabelle 2).

6.2 Ergebnis des Programms

Nach Durchlaufen des Kombinationsprogramms bekommen wir eine Liste (Tabelle 1, im Anhang ab Seite 127) von 1000 möglichen Kantenumgebungen. Innerhalb der Liste tauchen weitere Umgebungen auf, deren Radius nicht bestimmt werden kann. Nach genauer Beobachtung kann festgestellt werden, dass bei diesen Zellkombinationen ein Keilwinkel größer (oder gleich) der Summe der anderen Keilwinkel ist. Das Analogon im 3-Dimensionalen (die Eckenumgebung (3,3,7) liefert auch keine existierende Ecke, da der Flächenwinkel des 7-Ecks größer ist als die beiden 3-Ecksflächenwinkel zusammen; eine vollständige Rotation der 3-Ecke um die gemeinsamen Kanten mit dem 7-Eck zeigt schnell, dass sich die möglichen Positionen der dritten Ecken nicht überschneiden) verdeutlicht, warum diese Kantenumgebungen nicht existieren können.

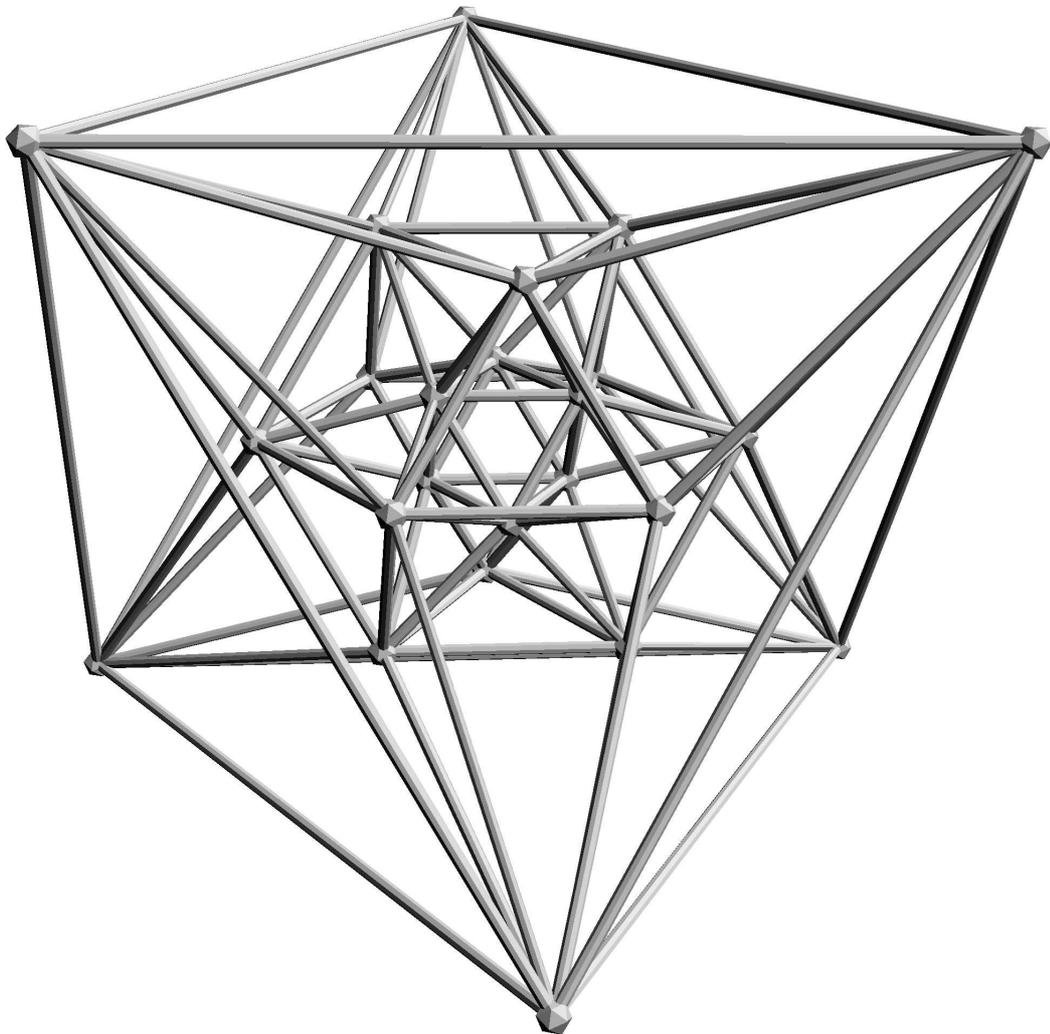
Da für die Berechnung der Radien gerundete Flächen- und Keilwinkel und gerundete Flächenradien innerhalb des Programms benutzt wurden, ergeben sich sehr unterschiedliche Genauigkeiten. Dabei lassen sich mindestens die ersten 13 Nachkommastellen als genau ansehen (siehe Seite 173).

Auch der Ausschluss von Kantenumgebungen, deren Winkelsumme größer als 2π ist, unterliegt dieser Ungenauigkeit. Allerdings wurde im Programm nicht scharf kleiner 2π gefordert, sondern auch Winkelsummen bei 2π und geringfügig darüber zugelassen (+ F). Damit kann sichergestellt werden, dass keine möglichen Kombinationen ausgeschlossen werden. Allerdings erhalten wir jetzt auch Kantenumgebungen mit unmöglichem (wie im ersten Absatz dieses Unterkapitels) oder unendlichem Radius (bei Winkelsumme = 2π).

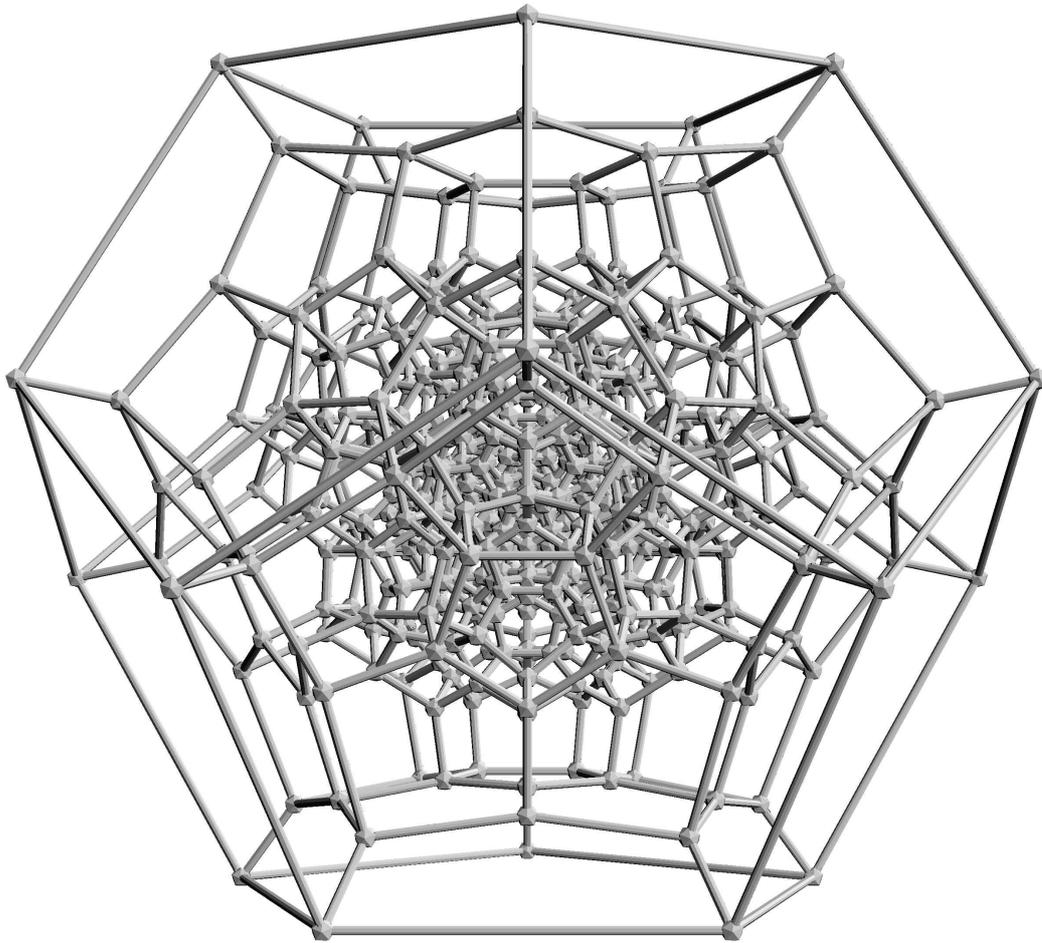
Anschließend wird diese Tabelle nach Radien sortiert (Tabelle 2, im Anhang ab Seite 139). Kombinationen mit gleichem (oder fast gleichem) Radius

können nun als Gruppe angesehen werden. Die gesuchten uniformen Polychora können damit nur Kantenumgebungen aus ein und derselben Gruppe von Kombinationen haben. Ein „Mischen“ der Gruppen kann ausgeschlossen werden.

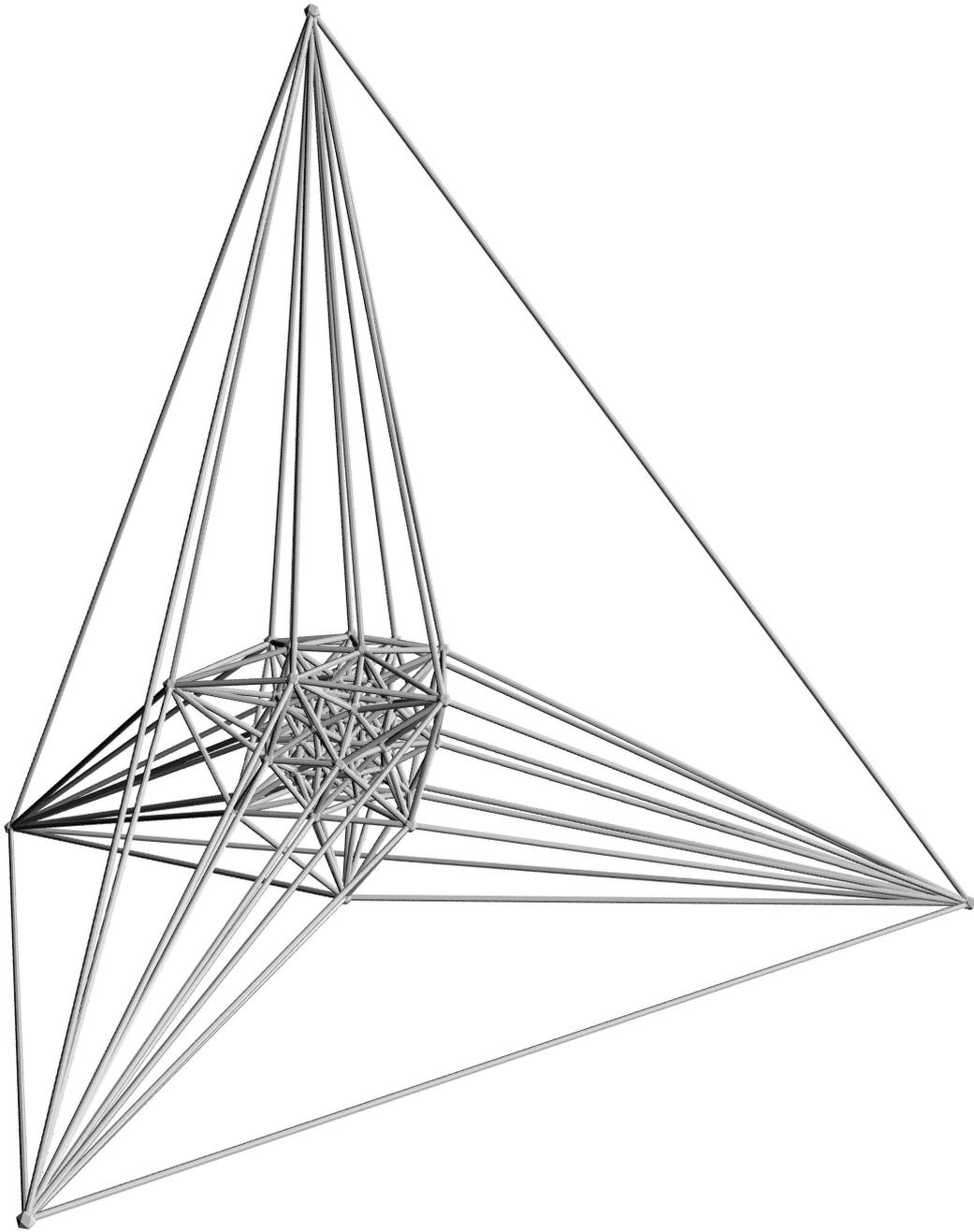
Somit hängt die folgende Bestimmung aller möglichen Eckenumgebungen von der Wahl der Gruppierung ab, also von der Wahl des Bereiches von Radien, die zu einer Gruppe zusammengefasst werden. Die Abschätzung der Genauigkeiten der Radien (siehe ab Seite 173) hilft dabei. In der Tabelle 2 ist dieses Gruppieren schon ersichtlich durch die kleinen horizontalen Striche bei den Radien.



Zentralprojektion des 24-Zellers



Zentralprojektion des 120-Zellers



Zentralprojektion des 600-Zellers

Kapitel 7

Elimination unmöglicher Kantenumgebungen

*„Ein elegant geführter Beweis ist ein Gedicht in allem, nur nicht
in der Form, in der er verfasst ist.“*

Morris Kline

Ziel dieses Kapitels ist es, die Kantenumgebungen aus der Tabelle 2 ab Seite 139 herauszufiltern, die zu keinen möglichen Eckenumgebungen führen. Der Rest wird dann in Kapitel 8 mit den gesuchten uniformen Polychora identifiziert.

7.1 Vorüberlegungen

Nach genauer Betrachtung der im letzten Kapitel erhaltenen Tabelle fällt uns auf, dass es sehr viele Gruppen gibt, die nur aus einer Kantenumgebung bestehen. Diese Umgebungen liefern also einen Radius, den keine andere Kantenumgebung hat. Sie kann demnach nur mit sich selbst kombiniert zu einem möglichen Polychor führen. Doch bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass ein „Anbauen“ an diese Kantenumgebung meist nicht möglich ist. Schauen wir uns zum Beispiel die Kantenumgebung $(4, 4, 3)(3, 4, 4)(3, 4, 3, 3)$ an, die allein eine Gruppe bildet (Tabelle 2, Seite 139), und hier genauer das 4-Antiprisma $(3, 4, 3, 3)$. Die hier angegebene Kantenumgebung läuft um eine Kante des Antiprismas zwischen 3- und 4-Eck. Möchten wir jetzt diese Kantenumgebung weiterbauen zu einer Abwicklung, so bekommen wir Probleme bei einer Antiprisma-Kante zwischen zwei 3-Ecken; die Zelle in der Form $(3, 3, 3, 4)$ kommt in der Kantenumgebung und damit in dieser Gruppe gar nicht vor. Wir können also um diese Kante nicht weiterbauen, um ein uniformes Polychor zu erhalten. Dies lässt sich zusammenfassen zum

Lemma 1: *Eine Kantenumgebung K kann nicht in einem uniformen Polychor vorkommen, wenn es eine Zelle in K gibt, die gedreht in keiner zur Gruppe (d.h. zu Kantenumgebungen (fast) gleichen Radius) gehörenden Kantenumgebungen vorkommt. Dabei bedeutet „gedreht“ die zyklische Vertauschung der Flächen in der Darstellung der Eckenumgebung.*

Wir können also Tabelle 2 durchsieben und alle Kantenumgebungen, die von Lemma 1 ausgeschlossen werden, mit einer 1 markieren.

Außerdem fallen in der Tabelle 2 gewisse Regelmäßigkeiten auf, die im Zusammenhang mit den Prismen und Antiprismen stehen. So treten zum Beispiel die Kantenumgebungen $(4, 4, p)(4, q, 4)(4, q, 4)$ und $(4, 4, q)(4, p, 4)(4, p, 4)$ für $p, q \geq 3$ jeweils als Gruppen und ohne weitere Kantenumgebungen auf. Durch räumliches „Zusammenbauen“ der Zellen zu einer (Teil-)Abwicklung sehen wir schnell, dass diese Gruppe für jedes Paar p, q zu einem Polychor führt: Es bilden p q -Prismen einen Turm, dessen Fußfläche wieder auf die obere Fläche fällt; dabei laufen um diesen Turm genau q p -Prismen zyklisch herum. Die p - und q -Prismen laufen also in zwei Ringen, die (4-dimensional) senkrecht aufeinander stehen, umeinander herum. Diese Konstruktion ist auch für $p, q > 14$ möglich. Diese Überlegungen führen uns zu einem weiteren Auswahlkriterium, mit dem wir die Anzahl der Gruppen, die wir zum Schluss genauer betrachten müssen, reduzieren können.

Lemma 2: *Die Gruppen, die nur aus den Kantenumgebungen $(4, 4, p)(4, q, 4)(4, q, 4)$ und $(4, 4, q)(4, p, 4)(4, p, 4)$ für $p, q \geq 3$ bestehen, führen jeweils zu einem uniformen Polychor, das wir p, q -Biprismachor nennen wollen.*

Im Zusammenhang mit Antiprismen kommen auch die Kantenumgebungen $(3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)(3, 3, 3, p)$ und $(3, 3, 3)(3, p, 3, 3)(3, p, 3, 3)$ für $p \geq 4$ vor. Schauen wir auf die erstere der beiden Umgebungen, dann sehen wir, dass das p -Antiprisma an einem 3-Eck mit einem Oktaeder zusammenfällt. Da nun aber in einem Antiprisma jedes 3-Eck auch mit einem p -Eck eine gemeinsame Kante hat, muss es auch eine Kantenumgebung geben, in der $(3, p, 3, 3)$ und $(3, 3, 3, 3)$ aneinander stoßen. Wenn nicht, können diese Kantenumgebungen nicht in einem uniformen Polychor vorkommen. Wenn nun die erste Kantenumgebung ausgeschlossen ist, so ist auch die zweite Umgebung ausgeschlossen, da nach Lemma 1 in dieser Gruppe keine Kantenumgebung mit $(3, 3, 3, p)$ existiert.

Lemma 3: *Die Kantenumgebungen $(3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)(3, 3, 3, p)$ und $(3, 3, 3)(3, p, 3, 3)(3, p, 3, 3)$ können nicht in einem uniformen Polychor vorkommen, wenn es in der Gruppe keine Kantenumgebung gibt, in der die Polyeder (mit den jeweiligen Keilwinkeln) $(3, p, 3, 3)$ und $(3, 3, 3, 3)$ aneinander liegen.*

Auch die Kantenumgebungen $(3, p, 3, 3)(3, p, 3, 3)(3, 3, 3, p)$ kommen häufiger vor, nämlich für alle $p \geq 3$. Seien die zwei p -Antiprismen, die sich bei der Kantenumgebung $(3, p, 3, 3)(3, p, 3, 3)(3, 3, 3, p)$ an dem p -Eck berühren, mit a_1 und a_2 bezeichnet. Weiter sei k eine gemeinsame Kante von a_1 und a_2 (und damit auch Kante des gemeinsamen p -Ecks). Dann muss laut Kantenumgebung an k noch ein drittes p -Antiprisma a_3 so angelegt werden, dass eine Antiprismakante zwischen zwei 3-Ecken an k anliegt. Weil in jedem p -Antiprisma jedes 3-Eck an ein p -Eck stößt, muss es eine zu k benachbarte Kante geben, an der die Zellen (bzw. Keilwinkel) $(3, 3, 3, p)$ und $(3, 3, 3, p)$ anliegen. Gibt es diese Kantenumgebung aber nicht, kann es auch kein uniformes Polychor mit der Kantenumgebung $(3, p, 3, 3)(3, p, 3, 3)(3, 3, 3, p)$ geben.

Lemma 4: *Die Kantenumgebung $(3, p, 3, 3)(3, p, 3, 3)(3, 3, 3, p)$ kann in einem uniformen Polychor nicht vorkommen, wenn in dessen Gruppe keine Kantenumgebung mit $(3, 3, 3, p)(3, 3, 3, p)$ vorhanden ist.*

Auch die Lemmata 2, 3 und 4 markieren wir in der Tabelle 2 mit der entsprechenden Nummer und schließen sie von den folgenden Betrachtungen aus.

7.2 Einzelbetrachtung des Rests

Betrachten wir jetzt die Tabelle 2 und darin nur die Gruppen, die durch kein Lemma vollständig ausgeschlossen wurden, dann sehen wir, dass noch 72 Gruppen übrig bleiben. In einigen davon sind zwar schon ein paar Kombinationen durch Lemma 1 oder 3 ausgeschlossen, es bleibt aber noch mindestens eine Kantenumgebung übrig. Bei mehreren übrig gebliebenen Umgebungen können des Weiteren einige auch durch Lemma 2 und 4 markiert sein. Hier müssen aber alle möglichen Kombinationen von Kantenumgebungen noch berücksichtigt werden.

Die Vorgehensweise in den einzelnen Gruppen wird immer sein, mit der ersten Kantenumgebung anzufangen und an anderen Kanten der Zellen weitere Kantenumgebungen anzubauen. Dabei wird die räumliche Vorstellung teilweise stark beansprucht, wenn es darum geht, sich fünf bis zehn verschiedene Zellen in bestimmter Weise „zusammengeklebt“ vorzustellen. Die von den Keilwinkeln schon bekannte Schreibweise (a, b, c, \dots) für die Zellen, die die Flächen um eine Ecke herum beschreibt, wird hier als Synonym für die Zelle, aber teilweise auch immer noch als eine bestimmte Kante der Zelle – nämlich der zwischen den ersten beiden Flächen a und b der Schreibweise verwendet. Liegen schon zwei Zellen an einer Fläche zusammen, so nennen wir eine

dritte Zelle dazwischen liegend, wenn sie mit den ersten beiden Zellen eine gemeinsame Kante hat und über Flächen an beiden anliegt.

All die folgenden „Baupläne“ sind Abwicklungen oder Teilabwicklungen der 4-dimensionalen Polychora, genauso wie ein Kreuz aus sechs 4-Ecken eine Abwicklung des Hexaeders ist. Dabei ist es natürlich, dass nicht alle Teile in der Abwicklung zusammenliegen, obwohl sie es im Polyeder/Polychor tun. Doch sukzessives gedankliches Verzerren der Abwicklung von innen heraus zeigt schnell, welche Kanten oder Flächen im Polyeder/Polychor aufeinander fallen. Ein wenig gedankliche Übung mit Abwicklungen im Vorwege der folgenden Betrachtungen kann deshalb nicht schaden (siehe Hilfe zur Visualisierung, Anhang D ab Seite 193).

Wir untersuchen also im Folgenden 72 Radian, für die wir einzelne oder mehrere entsprechende Kantenumgebungen kombinieren oder ausschließen müssen. Wie schon bei den Vorüberlegungen zur Elimination und bei der Erklärung des Kombinationsprogramms angedeutet, suchen wir eine endliche Menge von Polychora. Aber es ist uns jetzt schon bewusst, dass es unendlich viele uniforme Polychora geben muss, da wir z.B. jedes Antiprisma als Basis nehmen, auf allen Flächen Prismen kleben und ein gleiches Antiprisma als Deckel darauf setzen können. Diese Polychora nennen wir in Anlehnung an die Prismen im 3-Dimensionalen Prismachora. Diese müssen in den folgenden Betrachtungen – bis $p = 14$ – auch auftauchen, interessieren uns aber nur am Rande und werden deshalb nicht so ausführlich beschrieben. Gleiches gilt auch für die Biprismachora; das sind Polychora, die aus zwei umeinander gewickelte Zyklen von p - und q -Prismen bestehen. Von ihnen gibt es auch unendlich viele und sie interessieren uns deshalb ebenfalls nur am Rande. (Im Anhang ab Seite 178 werden diese noch einmal eingehender betrachtet.) Nur die anderen gefundenen Polychora werden mit Nummern versehen und im Anschluss zusammengefasst.

Außerdem wird die Existenz der sechs regelmäßigen Polychora und die Kenntnis über deren Aussehen vorausgesetzt. Der 5-Zeller besteht aus $(3,3,3)$, wobei drei Zellen um eine Kante angeordnet sind, der 8-Zeller aus $(4,4,4)$ mit drei Zellen pro Kante, der 16-Zeller aus $(3,3,3)$ mit vier Zellen pro Kante, der 24-Zeller aus $(3,3,3,3)$ mit drei Zellen pro Kante, der 120-Zeller aus $(5,5,5)$ mit ebenfalls drei Zellen pro Kante und der 600-Zeller aus $(3,3,3)$ mit fünf Zellen pro Kante (siehe auch Seite 97).

7.2.1 Radius ≈ 0.63246

Diese Gruppe besteht nur aus der Kantenumgebung mit drei Tetraedern; das Polychor besteht also nur aus Tetraedern, und um jede Kante liegen drei

Zellen. Der Weiterbau ist möglich und wir sehen, dass um jede Ecke vier Zellen liegen. Wir erhalten ein regelmäßiges Polychor, den 5-Zeller [# 1].

7.2.2 Radius ≈ 0.70711

Die erste Kantenumgebung dieser Gruppe ist $(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)$. Da wir vom Polychor Eckentransitivität erwarten, müsste, wenn diese Kantenumgebung vorkommt, an jeder Ecke mindestens ein Oktaeder vorkommen, weil bei einem Tetraeder alle Ecken benachbart sind. Dann müsste entweder an einem Tetraeder t_1 , der am Oktaeder o_1 liegt, ein zweiter Oktaeder o_2 flächig liegen und damit o_1 mindestens an einer Kante berühren, o_2 nur an einer Kante t_1 berührt (dann berühren sich o_1 und o_2 mindestens auch an einer Ecke), oder o_2 berührt t_1 nur an einer Ecke, muss also o_1 nicht notwendig berühren. Die erste Möglichkeit ist ausgeschlossen, da in der Gruppe keine Kantenumgebung existiert, in der zwei Oktaeder vorkommen. Auch die zweite Möglichkeit ist ausgeschlossen, denn wenn o_2 mit t_1 nur eine Kante gemeinsam haben soll, so muss zwischen ihren Flächen jeweils mindestens eine Zelle liegen, es also eine Kantenumgebung in der Gruppe geben, die Oktaeder besitzt und aus vier oder fünf Zelle besteht (was nicht der Fall ist).

Betrachten wir den dritten Fall, dass sich t_1 und o_2 nur an einer Ecke berühren. Dann müssten wir, ausgehend von t_1 mindestens eine „Zellschicht“ weiterbauen, bevor wir den Oktaeder ansetzen. Leider sind durch die Kantenumgebung $(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)$ schon alle Flächennachbarschaften von t_1 geklärt, nämlich weitere Tetraeder, die alle flächig an o_1 liegen. Diese Flächennachbarschaften gelten dann natürlich für alle Tetraeder an o_1 , wir können also nirgendwo eine freie Fläche finden, an der wir weiterbauen können. Die einzige weitere Kantenumgebung, die wir hier beobachten, ist $(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 3, 3)$; sie liegt an der Kante, die o_1 nur an einer Ecke berührt und vier Tetraeder an o_1 verbindet, die auf vier sich berührenden 3-Ecken von o_1 liegen. Da dies für jede Ecke von o_1 gilt, berühren sich also an den von o_1 abgewandten Tetraederecken genau acht Tetraeder. Die Eckentransitivität ist nicht erfüllt und somit kann $(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)$ als Kantenumgebung eines uniformen Polychors nicht vorkommen.

Die zweite und letzte Kantenumgebung dieser Gruppe ist $(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 3, 3)$. Das Polychor besteht also nur aus Tetraedern, wobei um jede Kante vier Zellen liegen. Auch diese Kantenumgebung führt zu einem regelmäßigen Polychor, zum 16-Zeller [# 2].

7.2.3 Radius ≈ 0.77460

Diese Gruppe besteht aus der Kantenumgebung $(3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)$. Es werden also hier Tetraeder an ihren Flächen nur von Oktaedern berührt. Andererseits liegen an jeder Oktaederkante je ein weiterer Oktaeder und ein Tetraeder. Angefangen an einem Oktaeder o_1 kleben wir also an jede zweite Fläche einen Tetraeder t_1 bis t_4 (d.h. jeweils nur an Flächen, die sich nur an einer Ecke berühren) und an die anderen Oktaeder o_2 bis o_5 . Nach genauer Betrachtung dieser Teilabwicklung stellen wir fest, dass nur noch die Flächen von o_2 bis o_5 frei sind, die gegenüber von o_1 liegen. Nach dem bisher verwendeten Muster „Abwechselnd-Tetraeder-Oktaeder“ für die Oktaeder muss an diesen Flächen ein Tetraeder t_5 liegen. Dieser berührt mit seinen vier Flächen genau die vier Oktaeder o_2 bis o_5 und schließt damit die Abwicklung. Wir erhalten ein uniformes Polychor, dass aus fünf Oktaedern und fünf Tetraedern besteht und nur eine Kantenumgebung hat [# 3]. Schon anhand der Anzahl der Zellen liegt eine Verwandtschaft mit dem 5-Zeller nahe. Wie wir später sehen werden, handelt es sich hier um einen abgestumpften 5-Zeller.

7.2.4 Radius ≈ 0.79057

Fangen wir bei dieser Gruppe mit dem Tetraeder t_1 der Kantenumgebung $(3,3,3)(3,4,4)(3,4,4)$ an. An jeder Fläche von t_1 liegt ein 3-Prisma p_1 bis p_4 . Diese berühren sich jeweils an ihren 4-Ecken und ergeben die zweite Kantenumgebung von je drei Prismen an einer gemeinsamen Kante: $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)$. Bei der Teilabwicklung bleiben also nur noch die vier „oberen“ 3-Ecke (gegenüber t_1) frei; hier passt nur noch ein weiterer Tetraeder t_2 , welcher die Abwicklung schließt. Dieses uniforme Polychor besteht also aus zwei Tetraedern und vier 3-Prismen. Analog zu den Prismen mit Grundfläche p -Eck im 3-Dimensionalen kann dieses Polychor als Prismachor mit Grundzelle Tetraeder oder als tetraedrisches Prismachor bezeichnet werden [# 4].

7.2.5 Radius ≈ 0.86603

Die Kantenumgebung $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,4)$ kann nicht vorkommen, da an der Kante mit $(3,4,4)(4,4,4)$ nicht weiter gebaut werden kann. Der Rest dieser Gruppe führt, analog zu den Überlegungen des vorherigen Absatzes (Radius ≈ 0.79057), zu einem oktaedrischen Prismachor, der aus zwei Oktaedern und acht 3-Prismen besteht [# 5].

7.2.6 Radius ≈ 0.87947

In dieser Gruppe haben wir die vier Kantenumgebungen **(I)** = $(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 3, 3, 4)$, **(II)** = $(3, 3, 3)(3, 4, 3, 3)(3, 4, 3, 3)$, **(III)** = $(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)$ und **(IV)** = $(3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)(3, 3, 3, 4)$. Fangen wir mit der größten Zelle von **(I)** an: einem $(3, 3, 3, 4)$. Nach **(II)** können an den 4-Ecken nur weitere $(3, 3, 3, 4)$ liegen und zwischen ihnen dann nur je ein $(3, 3, 3)$. Da wir mit einer **(I)** angefangen sind, gibt es jetzt zwei $(3, 3, 3)$, die zwischen den $(3, 3, 3, 4)$ liegen und über ein weiteres $(3, 3, 3)$ verbunden sind. Da aber im $(3, 3, 3)$ alle zwei Flächen eine gemeinsame Kante haben, berühren sich auch die beiden $(3, 3, 3)$ zwischen den $(3, 3, 3, 4)$ an einer Kante, was aber nicht möglich ist, da zwei 3-Ecke im $(3, 3, 3, 4)$, die am gleichen 4-Eck liegen, keine gemeinsame Kante haben. **(I)** kann also nicht benutzt werden. Betrachten also zwei $(3, 3, 3, 4)$, die an einem 4-Eck zusammengeklebt sind. Zwischen ihnen können nach **(II)** nur $(3, 3, 3)$ sein. Dann passen in die entstandenen Lücken – eine Ecke mit vier 3-Ecken – aber $(3, 3, 3, 3)$, was nach **(IV)** auch erlaubt ist. Jetzt haben wir aber Kanten mit $(3, 3, 3, 3)(3, 4, 3, 3)$, welche in dieser Gruppe nicht vorkommen. Wir können also die Zelle $(3, 3, 3, 4)$ nicht benutzen. Damit bleibt als einzige mögliche Kantenumgebung nur noch **(III)**: Fangen wir mit einem $(3, 3, 3, 3)$ innen an und kleben an alle Flächen $(3, 3, 3)$. Nach **(III)** muss jetzt zwischen diesen $(3, 3, 3)$ an den Kanten des inneren $(3, 3, 3, 3)$ jeweils noch ein weiteres $(3, 3, 3)$ gelegt werden. Damit bekommen wir für jede Ecke des $(3, 3, 3, 3)$ eine Lücke, an deren innerer Ecke je vier 3-Ecke hängen; dort passt jeweils – wieder nach **(III)** – ein neues $(3, 3, 3, 3)$. Diese sechs $(3, 3, 3, 3)$ berühren sich dann aber auch schon über Kanten, was in dieser Gruppe nicht erlaubt ist. Somit ist **(III)** ebenfalls nicht möglich.

7.2.7 Radius ≈ 0.96269

Analog zum Absatz mit dem Radius ≈ 0.79057 erhalten wir aus dieser Gruppe ein Prismachor, das als Grundzelle ein 4-Antiprisma hat, also 4-antiprismatisches Prismachor genannt werden kann.

7.2.8 Radius ≈ 1.00000

Für diesen Radius finden wir zehn Kantenumgebungen: **(I)** = $(3, 3, 3)(3, 5, 3, 3)(3, 5, 3, 3)$, **(II)** = $(3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)(3, 3, 3, 3, 3)$, **(III)** = $(4, 4, 4)(4, 4, 4)(4, 4, 4)$, **(IV)** = $(3, 3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)$, **(V)** = $(4, 4, 3)(3, 4, 4)(3, 3, 3)(3, 4, 4)$, **(VI)** = $(3, 3, 3)(3, 3, 3)(3, 4, 4)(3, 4, 4)$, **(VII)** = $(4, 4, 3)(3, 4, 4)(3, 4, 3, 4)$, **(VIII)** = $(3, 3, 3)(3, 4, 4)(3, 4, 3, 4)$, **(IX)** = $(3, 3, 3)(3, 3, 3, 3)(3, 3, 3, 5)$ und **(X)** = $(4, 4, 3)(4, 4, 3)(3, 4, 4)(3, 4, 4)$.

Fangen wir mit **(I)** an. Dann bekommen wir eine Kante mit $(3,3,3)$ $(3,3,3,5)$. Dort passt mit **(IX)** nur ein $(3,3,3,3)$. Dann haben wir aber eine Kante mit $(3,5,3,3)(3,3,3,3)$, welche in dieser Gruppe nicht existiert. Das heißt also, dass weder **(I)** noch **(IX)** möglich sind und somit im Folgenden $(3,3,3,5)$ nicht berücksichtigt werden müssen.

Also fangen wir mit **(II)** an und setzen den $(3,3,3,3,3)$ nach innen. Betrachten wir eine Ecke, die an **(II)** liegt und mit ihr die fünf 3-Ecke: An einem 3-Eck liegt schon ein $(3,3,3)$ und daneben ein $(3,3,3,3)$. Mit **(II)** kann neben dem $(3,3,3,3)$ nur ein weiterer $(3,3,3)$ folgen. Analog kann neben dem ersten $(3,3,3)$ auch nur ein $(3,3,3,3)$ sein. Jetzt liegt aber zwischen dem letzten $(3,3,3)$ und dem letzten $(3,3,3,3)$ nur noch ein 3-Eck, das aus analogen Gründen mit einem $(3,3,3,3)$ und gleichzeitig mit einem $(3,3,3)$ beklebt werden muss. Dies ist unmöglich. Damit ist auch die Benutzung von **(II)** und mithin die Benutzung von $(3,3,3,3,3)$ in dieser Gruppe nicht möglich.

Fangen wir somit mit **(III)** an. Hier kleben wir drei $(4,4,4)$ um eine Kante. Da nun **(III)** die einzige Kante mit $(4,4,4)$ ist, kommen wir sofort zum regelmäßigen 8-Zeller [# 6].

Da wir schon **(II)** und **(IX)** ausgeschlossen haben, besitzt **(IV)** eine zum Rest der Gruppe disjunkte Zellenmenge, kann sich also mit keiner anderen Kantenumgebung kombinieren. Und da **(IV)** auch nur $(3,3,3,3)$ benutzt, bekommen wir den bekannten regelmäßigen 24-Zeller [# 7].

Fangen wir jetzt mit **(V)** an und setzen den $(3,3,3)$ ins Innere. An eine der freien 3-Ecke des $(3,3,3)$ kann nun entweder nach **(V)** wieder ein $(3,4,4)$, nach **(VI)** ein weiterer $(3,3,3)$ oder nach **(VIII)** ein $(3,4,3,4)$ angeklebt werden. Im ersten Fall sind damit auch die $(3,4,4)$ zwischen den an $(3,3,3)$ angrenzenden $(3,4,4)$ gegeben, und damit die am inneren $(3,3,3)$ angrenzende Lücke in Form eines zweiten $(3,3,3)$. Jede benutzte Kantenumgebung entspricht **(V)** und an der ersten vollständig umschlossenen Ecke stoßen zwei $(3,3,3)$ – mit den Spitzen – und sechs $(3,4,4)$ aneinander. Es ist leicht einzusehen, dass diese Eckenumgebung sich auf die anderen fortpflanzt, bis das Polychor geschlossen ist [# 8]. Im zweiten Fall – am inneren $(3,3,3)$ wird noch ein $(3,3,3)$ angeklebt – sind die am zweiten $(3,3,3)$ angrenzenden $(3,4,4)$ auch gegeben, allerdings in anderer Orientierung als im ersten Fall. Mit **(X)** ist dann auch die Lücke mit einem weiteren $(3,4,4)$ geschlossen und an der ersten umschlossenen Ecke liegen sechs $(3,4,4)$ und zwei $(3,3,3)$, die jetzt an einem 3-Eck zusammenkleben. Betrachten wir nun auf der anderen Seite die zwei noch freien 3-Ecke der beiden $(3,3,3)$ und die Kante dazwischen: An der Spitze des einen 3-Ecks gegenüber der Zwischenkante muss ein weiterer $(3,3,3)$ anliegen, der wegen der Eckentransitivität an diesem 3-Eck kleben

muss. Damit liegen aber an den Ecken der Zwischenkante schon drei $(3,3,3)$, womit die Eckentransitivität gebrochen und der zweite Fall nicht möglich ist. Im letzten Fall kleben wir an ein 3-Eck des inneren $(3,3,3)$ einen $(3,4,3,4)$. Damit benutzen wir auch **(VII)** und umschließen die erste Ecke mit drei $(3,4,4)$, einem $(3,3,3)$ und einem $(3,4,3,4)$ vollständig. Durch Ausnutzung der Eckentransitivität müssen wir nun an den anderen zwei Ecken des 3-Ecks zwischen $(3,3,3)$ und $(3,4,3,4)$ die gleichen Eckenumgebungen konstruieren. Das führt aber dazu, dass an der letzten freien Spitze des inneren $(3,3,3)$ nun schon sechs $(3,4,4)$ angrenzen und obendrein die verbleibende Lücke nur von einem letzten $(3,3,3)$ und nicht von einem $(3,4,3,4)$ gefüllt werden kann. Damit ist auch im dritten Fall die Eckentransitivität gebrochen.

Fangen wir mit **(VI)** an. Dann können wir an den Kanten zwischen $(3,3,3)$ und $(3,4,4)$ am $(3,3,3)$ entweder mit **(VI)** einen weiteren $(3,3,3)$ oder mit **(VIII)** einen $(3,4,3,4)$ ankleben. Letzterer geht aber an der Kante zwischen den beiden $(3,3,3)$ nicht. Und ersterer führt zwischen den $(3,4,4)$ zu einer Kante mit $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)$, welche ebenfalls nicht existiert.

Wenn wir mit **(VII)** anfangen, dann haben wir zwischen $(3,4,4)$ und $(3,4,3,4)$, die mit einem 4-Eck zusammenkleben, nur die Möglichkeit, **(VIII)** anzubauen, was aber wieder zu dem Widerspruch aus dem dritten Fall des Absatzes mit **(V)** als Anfang führt. Damit ist auch klar, dass **(VII)** nicht zu einem gesuchten Polychor konstruiert werden kann.

Als letztes fangen wir mit **(X)** an. Da wir mit den anderen Kantenumgebungen dieser Gruppe alle Kombinationen schon bearbeitet haben, kann **(X)** also nur allein vorkommen. Nennen wir die Orientierung der beiden $(3,4,4)$, die sich mit einem 3-Eck berühren, liegend, die der anderen beiden stehend. Dann müssen wir an einer Kante zwischen einem liegenden und einem stehenden $(3,4,4)$, die die erste **(X)** nicht berührt, mit **(X)** einen weiteren stehenden – am stehenden – und einen weiteren liegenden – am liegenden – $(3,4,4)$ ankleben. Damit erhalten wir aber zwischen den drei stehenden $(3,4,4)$ eine Kante mit der Umgebung $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)$, welche in dieser Gruppe nicht existiert, und somit kann **(X)** allein nicht vorkommen.

7.2.9 Radius ≈ 1.03187

Die Gruppe mit diesem Radius besteht aus den Kantenumgebungen **(I)** = $(3,3,3)(3,4,3,3)(3,4,3,4)$, **(II)** = $(3,3,3)(3,3,3,4)(3,3,3,4)$ und **(III)** = $(4,4,4)(3,4,3,3)(3,4,3,3)$. Innen fangen wir mit der größten Zelle, einem $(3,4,3,4)$ an. Dann kleben wir an allen 3-Ecken $(3,3,3)$ und an allen 4-Ecken $(3,4,3,3)$ an. Damit benutzen wir **(I)** und **(II)**. Jetzt erhalten wir eine Lücke, die aus sechs 4-Ecken der $(3,3,3,4)$ besteht, wobei von der 3er-Symmetrie der

$(3,3,3)$ immer drei 4-Ecke an einer Ecke zusammenfallen. In diese Lücke passt nur ein $(4,4,4)$, was **(III)** auch erlaubt. Damit schließt sich das Polychor. Allerdings liegen an den Ecken des inneren $(3,4,3,4)$ keine $(4,4,4)$ und am äußeren $(4,4,4)$ keine $(3,4,3,4)$, womit die Eckentransitivität nicht erfüllt und somit dieses Polychor keines der gesuchten ist.

7.2.10 Radius ≈ 1.07448

Zu dieser Gruppe gehören die sieben Kantenumgebungen **(I)** = $(3,4,4)(4,5,4)(3,5,3,3)$, **(II)** = $(3,4,4)(3,4,4)(3,3,3,3,3)$, **(III)** = $(3,4,4)(3,4,4)(3,3,3,5)$, **(IV)** = $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,5)$, **(V)** = $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)(4,4,5)$, **(VI)** = $(4,4,3)(4,4,5)(4,4,5)$ und **(VII)** = $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)$. Nehmen wir zuerst **(I)** und setzen $(3,3,3,5)$ nach innen. Dann müssen an den beiden 5-Ecken $(4,4,5)$ und an allen 3-Ecken $(3,4,4)$ liegen. Diese bilden dann auch **(III)** und **(V)**. Wegen Eckentransitivität muss jetzt an den äußeren Ecken wieder ein $(3,3,3,5)$ sein, welcher das Polychor abschließt und zu einem 5-antiprismatischen Prismachor führt. Fangen wir mit **(II)** an und kleben an allen 3-Ecken des inneren $(3,3,3,3,3)$ je ein $(3,4,4)$, dann erhalten wir auch **(VII)**. Auch wegen Eckentransitivität kann jetzt außen nur noch ein zweiter $(3,3,3,3,3)$ das Polychor schließen, was zu einem ikosaedrischen Prismachor führt [# 9]. Beginnen wir mit **(III)**, dann können wir an der entstehenden Kante zwischen den beiden $(4,4,3)$ nur noch **(IV)**, **(V)** und **(VII)** anbauen. Allerdings benötigen wir mit **(IV)** oder **(V)** in den Kantenumgebungen **(IV)** bis **(VII)** eine Kante mit $(4,5,4)(3,5,3,3)$, welche nicht existiert. Benutzen wir hier **(VII)**, befestigen also an einem 3-Eck des $(3,3,3,5)$, dass die ersten beiden 3-Ecke mindestens an einer Ecke berührt, einen weiteren $(3,4,4)$, dann können wir in die entstehende Lücke zwischen dem $(3,5,3,3)$ und den zwei $(3,4,4)$, die das $(3,3,3,5)$ noch nicht über eine Fläche berühren, keine der möglichen Zellen einfügen, können also nicht weiterbauen. Betrachten wir nun **(IV)**: Die drei Zellen bilden eine Lücke der Form $(3,3,5)$, die wir mit keiner uniformen Zelle schließen können, ohne die Konvexität des Polychors zu verletzen. Gleiches gilt auch für **(VI)**, welche einerseits eine Lücke der Form $(3,5,5)$ erzeugt, die wir auch nicht schließen können, andererseits auch eine unmögliche Kante mit $(\underline{4},5,4)(\underline{4},5,4)$ – verbunden durch ein 4-Eck – erzeugt. Und mit **(VII)** allein lässt sich auch keine Eckenumgebung konstruieren, da wir an den 3-Ecken nicht weiterbauen können.

7.2.11 Radius ≈ 1.11803

Diese Gruppe besteht aus den Kantenumgebungen **(I)** = $(3,4,4)(4,4,4)(3,4,3,4)$, **(II)** = $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,4)(4,4,4)$ und **(III)** = $(4,4,3)(4,4,4)$

(4,4,3) (4,4,4). Wenn wir mit einem (3,4,3,4) innen anfangen und an allen seinen 3-Ecken und 4-Ecken nach **(I)** ein (3,4,4) bzw. ein (4,4,4) anlegen, dann erhalten wir die Kantenumgebung **(III)**. Um die Eckentransitivität zu erfüllen, muss jetzt außen noch ein (3,4,3,4) angefügt werden. Damit ist das Polychor geschlossen [# 10]. Fangen wir mit **(II)** an und versuchen, weiterzukonstruieren, dann erhalten wir – sozusagen senkrecht auf der Kante von **(II)** – zwei Kanten, an denen schon zwei (4,4,4) benachbart sind. Nach **(II)** müssen dort zwei weitere (3,4,4) so angelegt werden, dass deren 4-Ecke aufeinander zeigen. Dann haben wir jetzt aber zwei Kanten mit (3,4,4)(4,4,4) (3,4,4); diese Teilsequenz kommt in keiner Kantenumgebung der Gruppe vor. Eine Konstruktion mit der Umgebung **(II)** ist also nicht möglich.

7.2.12 Radius ≈ 1.18322

Hier gruppieren sich die Kantenumgebungen **(I)**=(3,4,4) (3,3,3,3) (3,4,3,4) und **(II)**=(4,4,3) (3,4,3,4) (3,4,3,4). Fangen wir innen mit einem (3,4,3,4) an und kleben an einer Kante die Umgebung **(I)** an, dann bekommen wir zwei weitere Kanten, an denen nur **(I)** mit einem (3,4,4) passt. Jetzt berühren jede der drei Ecken zwischen dem ersten (3,4,3,4) und dem (3,3,3,3) genau zwei 3-Ecke und zwei 4-Ecke in alternierender Reihenfolge. Hier passen also (3,4,3,4) hinein, was mit **(II)** auch erlaubt ist. Nun können wir zwischen den neuen (3,4,3,4) am ersten (3,3,3,3) wieder ein (3,4,4) kleben. Andererseits können an den ersten (3,4,4) an der anderen Seite weitere (3,3,3,3) angefügt werden usw. Diese Konstruktion kann widerspruchsfrei weiter geführt werden [# 11].

7.2.13 Radius ≈ 1.19709

Diese Gruppe führt eindeutig zu einem 6-antiprismatischen Prismachor. Fangen wir mit einem (3,3,3,6) innen an, dann können wir mit den Kantenumgebungen (3,4,4)(3,4,4)(3,3,3,6) und (3,4,4)(4,6,4)(3,6,3,3) nur (3,4,4) an allen 3-Ecken und (4,4,6) an allen 6-Ecken anlegen. Damit erhalten wir zwischen den Prismen auch die dritte Kantenumgebung der Gruppe: (4,4,3) (4,4,3) (4,4,3) (4,4,6). Außen herum passt jetzt noch der zweite (3,3,3,6) und schließt das Polychor.

7.2.14 Radius ≈ 1.22474

Diese Gruppe besteht aus drei Kantenumgebungen, wobei die zweite zu den beiden anderen disjunkt ist. Nach Lemma 2 sind die erste und dritte Kantenumgebung ein 4,6-Biprismachor. Die zweite Kantenumgebung ist (3,3,3)

$(3,4,3,4)$ $(3,4,3,4)$. Angefangen mit einem $(3,4,3,4)$ kleben wir an jedes 3-Eck ein $(3,3,3)$ und an jedes 4-Eck ein $(3,4,3,4)$. Dann fallen die meisten 4-Ecke der sechs neuen $(3,4,3,4)$ – genauer: die 4-Ecke, die benachbart sind zu dem 4-Eck, das zum ersten $(3,4,3,4)$ führt – zusammen. In die acht neuen Löcher, die jeweils aus drei 3-Ecken bestehen, passen wieder $(3,3,3)$ und ganz außen können wir wieder ein $(3,4,3,4)$ anlegen. Die Konstruktion schließt sich widerspruchsfrei [# 12].

7.2.15 Radius ≈ 1.26491

Für diesen Radius gibt es die Kantenumgebungen $(3,3,3)(3,6,6)(3,6,6)$ und $(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)$. Wenn wir mit einem $(3,6,6)$ anfangen, können wir an allen 3-Ecken ein $(3,3,3)$ und allen 6-Ecken ein $(3,6,6)$ – mit deren 3-Ecken zu den $(3,3,3)$ – kleben. Dann berühren sich die neuen $(3,6,6)$ an ihren freien 6-Ecken und bilden eine letzte Lücke, die ein weiterer $(3,3,3)$ füllt und so das Polychor schließt [# 13].

7.2.16 Radius ≈ 1.27475

Zu diesem Radius gehören die drei Kantenumgebungen $(6,6,3)(4,6,4)(4,6,4)$, $(3,4,4)(4,6,4)(3,6,6)$ und $(4,4,3)(4,4,6)(4,4,6)$. Dass diese Gruppe eindeutig zu einem uniformen Polychor gehört, ist einfach einzusehen [# 14]: Beginnend mit einem $(3,6,6)$ können wir an dessen 6-Ecken nur $(4,4,6)$ und an dessen 3-Ecken nur $(3,4,4)$ kleben. Außen herum passt dann – quasi als Deckel – ein weiterer $(3,6,6)$. Eckentransitivität ist ebenfalls gegeben.

7.2.17 Radius ≈ 1.32749

Auch dass diese Gruppe eindeutig zu einem uniformen Prismachor führt, ist leicht zu sehen: Angefangen mit einem $(3,3,3,7)$ kleben wir an jedes 3-Eck ein $(3,4,4)$ und an jedes 7-Eck ein $(4,4,7)$. Wir erhalten die Kantenumgebungen der Gruppe: $(3,4,4)(3,4,4)(3,3,3,7)$, $(3,4,4)(4,7,4)(3,7,3,3)$ und $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)(4,4,7)$. Außen herum passt dann wieder ein $(3,3,3,7)$.

7.2.18 Radius ≈ 1.41421

Diese Gruppe besteht aus zwei disjunkten Kantenumgebungen: $(6,6,3)(3,6,6)(3,6,6)$ und $(4,6,4)(4,6,4)(4,4,6)$. Letztere führt zu einem 6,6-Biprismachor nach Lemma 2. Da beide Kantenumgebungen disjunkt sind, d.h. keine Zellen gemeinsam haben, können sie auch nicht kombiniert werden. Also brauchen wir nur noch die erste Kantenumgebung allein zu betrachten: Fangen wir

mit einem $(3,6,6)$ innen an. An den Kanten zwischen seinen 6-Ecken liegen dann noch zwei $(3,6,6)$, die sich am 3-Eck berühren und selber mit dem inneren $(3,6,6)$ über die 6-Ecke verbunden sind. An den 3-Ecken der inneren Zelle liegen dann auch $(3,6,6)$, die sich mit den zuerst angefügten $(3,6,6)$ jeweils wieder über 6-Ecke berühren. Zuletzt können wir jetzt außen wieder ein $(3,6,6)$ anfügen und schließen damit das Polychor [# 15].

7.2.19 Radius ≈ 1.43372

Diese Gruppe besteht aus den Kantenumgebungen **(I)** = $(4,4,3)$ $(4,4,3)$ $(4,4,3)$ $(4,4,3)$ $(4,4,4)$, **(II)** = $(3,4,4)$ $(4,4,4)$ $(3,4,3,3,3)$ und **(III)** = $(3,4,4)$ $(3,4,4)$ $(3,3,3,3,4)$. Angefangen mit einem $(3,3,3,3,4)$ können wir an jedem 3-Eck ein $(3,4,4)$ und an jedem 4-Eck ein $(4,4,4)$ ankleben. Damit erhalten wir die Kantenumgebungen **(I)**, **(II)** und **(III)**. Und an den neuen Kanten passt genau wieder ein $(3,3,3,3,4)$. Die Konstruktion ist widerspruchsfrei [# 16].

7.2.20 Radius ≈ 1.44701

Zu diesem Radius gehören die Kantenumgebungen **(I)** = $(3,4,3,3)$ $(3,3,3,3)$ $(3,4,3,4)$ und **(II)** = $(3,3,3,3)$ $(3,3,3,3)$ $(3,3,3,4)$. Beginnen wir mit einem $(3,4,3,4)$, so folgt aus den Kantenumgebungen der Gruppe, dass an allen 4-Ecken ein $(3,4,3,3)$ und an allen 3-Ecken ein $(3,3,3,3)$ sitzt. Damit berühren sich jeweils zwei $(3,4,3,3)$ an den Ecken, wobei zwischen ihren 4-Ecken das $(3,4,3,4)$ und zwischen den 3-Ecken neben den 4-Ecken je ein $(3,3,3,3)$ liegt. An den entstandenen Kanten zwischen $(3,3,3,4)$ und $(3,3,3,3)$ passt nach **(II)** nur noch je ein weiteres $(3,3,3,3)$, das das erste $(3,4,3,4)$ nur über eine Ecke berührt. Damit liegen jetzt außen Kanten mit $(3,3,3,3)$ und $(3,3,3,3)$; dort passt nach **(II)** nur je ein $(3,3,3,4)$. Da aber das $(3,3,3,3)$ über 3er-Symmetrie verfügt, das $(3,3,3,4)$ hingegen nicht, gibt es eine Kante mit den Zellen $(3,3,3,3)$, $(3,3,3,3)$ und $(3,4,3,3)$, die nicht in der Gruppe ist.

7.2.21 Radius ≈ 1.46360

Aus dieser Gruppe lässt sich eindeutig ein Prismachor konstruieren: Angefangen mit einem $(3,3,3,8)$ kleben wir an alle 3-Ecke ein $(3,4,4)$ und an die beiden 8-Ecke je ein $(4,4,8)$. Dann können wir außen noch ein $(3,3,3,8)$ anfügen und schließen das Polychor. Damit bestätigen wir die Kantenumgebungen dieser Gruppe: $(3,3,3,8)$ $(3,4,4)$ $(3,4,4)$, $(3,8,3,3)$ $(4,8,4)$ $(3,4,4)$ und $(4,4,3)$ $(4,4,3)$ $(4,4,3)$ $(4,4,8)$.

7.2.22 Radius ≈ 1.47492

Diese Gruppe besteht nur aus der Kantenumgebung $(4,4,3) (4,4,3) (3,4,4) (3,4,3,4)$. Fangen wir innen mit einem $(3,4,3,4)$ an und konstruieren an einer Kante die vorgegebene Kantenumgebung: An einem 3-Eck des $(3,4,3,4)$ kleben wir ein erstes $(3,4,4)$ und an einem zum 3-Eck benachbarten 4-Eck ein weiteres $(3,4,4)$ an, so dass dessen zweites 4-Eck zum ersten $(3,4,4)$ zeigt. Diese beiden $(3,4,4)$ zeigen nun mit ihren 4-Ecken aufeinander; in diese Lücke rutscht ein drittes $(3,4,4)$ und berührt mit einer Kante (die zwischen zwei 4-Ecken) den $(3,4,3,4)$. Betrachten wir bei dieser Kantenumgebung einmal die Sequenz der Flächen: Nach dem 3-Eck des $(3,4,3,4)$ folgen 4-Eck, 4-Eck, 4-Eck, wobei das letzte wieder auch zum $(3,4,3,4)$ gehört. Jetzt betrachten wir eine Kante zwischen dem $(3,4,3,4)$ und dem zweiten $(3,4,4)$; letzteres zeigt ja sein 4-Eck zum ersten $(3,4,4)$. Damit zeigen seine 3-Ecke zu zwei (anderen) 3-Ecken des $(3,4,3,4)$. Wir bräuchten also eine Sequenz von Flächen, die zwei 3-Ecke beinhaltet. Diese gibt es aber in der Kantenumgebung und damit in dieser Gruppe nicht.

7.2.23 Radius ≈ 1.48563

In dieser Gruppe haben wir neun verschiedene Kantenumgebungen: **(I)** = $(4,4,3) (4,4,4) (4,4,4) (4,4,4)$, **(II)** = $(3,3,3) (3,4,4) (4,4,4) (3,4,4)$, **(III)** = $(4,4,3) (4,4,4) (4,4,3,4)$, **(IV)** = $(4,4,3) (4,4,4) (4,4,8)$, **(V)** = $(3,3,3) (3,4,4) (3,4,4,4)$, **(VI)** = $(3,4,4) (4,4,4) (3,4,4,4)$, **(VII)** = $(4,4,4) (4,4,4) (4,4,3,4)$, **(VIII)** = $(4,4,4) (4,4,4) (4,4,8)$ und **(IX)** = $(4,4,4) (4,8,4) (4,8,4)$.

Fangen wir mit **(I)** an und bezeichnen zuerst die beiden $(4,4,4)$ am $(3,4,4)$ als Flächenzellen, das dritte $(4,4,4)$ als inneren $(4,4,4)$ und das $(3,4,4)$ als Kantenzelle. Dann können wir an den vier freien Kanten zwischen dem inneren $(4,4,4)$ und den Flächenzellen wieder **(I)** konstruieren und erhalten eine weitere Flächen- und zwei weitere Kantenzellen. Jetzt bekommen wir eine Lücke zwischen den drei Kantenzellen, die aus drei 3-Ecken besteht. Mit **(II)** passt dort nur ein $(3,3,3)$, welches wir hier als Eckzelle bezeichnen wollen. Diese Ergänzungen von Flächen-, Kanten- und Eckzellen können wir mit **(I)** und **(II)** an allen Flächen, Kanten und Ecken des inneren $(4,4,4)$ vornehmen, ohne einen Widerspruch zu bekommen. An diesem Gebilde könnten wir nun mit **(III)** und **(V)** einen $(3,4,4,4)$ herum legen und den Polychor schließen, würden dann aber der Eckenttransitivität widersprechen, da an den Ecken des inneren $(4,4,4)$ kein $(3,4,4,4)$ anliegt. Wir können also an dem Gebilde nur weitere $(3,3,3)$, $(3,4,4)$ und $(4,4,4)$ anfügen (auch **(IV)** ist aus den gleichen Gründen für $(4,4,8)$ ausgeschlossen). Damit können wir nach **(I)** zwischen den äußeren Kanten- und Flächenzellen nur neue Flächenzellen (an den

Kantenzellen) und sechs weitere $(4,4,4)$ – korrespondierend zu den sechs Flächen des inneren $(4,4,4)$ – ankleben. In die entstandenen Lücken, die aus drei zyklischen 4-Ecken (von den Flächenzellen) und einem 3-Eck (von den Eckzellen) bestehen, passen wieder zwölf weitere Kantenzellen ($= (3,4,4)$) korrespondierend zu den Kanten des inneren $(4,4,4)$ hinein. Eine weitere Schicht Eck-, Kanten- und Flächenzellen und schließlich ein letzter $(4,4,4)$ außen (alles nach **(I)** und **(II)**) schließen das Polychor und erfüllen dann auch die Eckentritivität [# 17].

Andererseits können wir, nachdem wir ein **(I)** gebaut haben, an den beiden Ecken der Kante von **(I)** auch jeweils ein $(3,4,4,4)$ setzen und dabei **(III)**, **(VI)** und **(VII)** benutzen. Jetzt können wir zwischen den beiden $(3,4,4,4)$ jeweils $(4,4,3)$ und $(4,4,4)$ mit **(I)**, **(III)**, **(VI)** und **(VII)** kleben. Damit schließen wir das Polychor [# 18].

Wenn wir mit **(III)** anfangen, dann gibt es zwei Möglichkeiten: Erstens kann der $(4,4,4)$ an ein 4-Eck geklebt werden, das zwischen zwei 3-Ecken am $(3,4,4,4)$ liegt oder an ein 4-Eck, das am $(3,4,4,4)$ an allen Kanten wieder ein 4-Eck berührt. Betrachten wir zunächst den ersten Fall und fangen mit einem $(3,4,4,4)$ innen an. Mit **(III)** kleben wir dann an ein 4-Eck zwischen vier 4-Ecken des $(3,4,4,4)$ ein $(3,4,4)$ und an zwei benachbarten 4-Ecken des $(3,4,4,4)$ jeweils ein $(4,4,4)$, so dass die freien 4-Ecke des $(3,4,4)$ mit den 4-Ecken der angeklebten $(4,4,4)$ zusammenfallen. Nun betrachten wir ein 4-Eck des $(3,4,4,4)$, das neben dem $(3,4,4)$ liegt. Dieses 4-Eck hat an den Seiten zwei 3-Ecke, die wiederum benachbart zu den zwei angeklebten $(4,4,4)$ sind. An diesen Kanten – zwischen $(3,4,4,4)$ und $(4,4,4)$ – passt nur **(VI)** mit jeweils einem weiteren $(3,4,4)$. Da sich nun aber die beiden $(4,4,4)$ an einer Kante – nämlich die am ersten $(3,4,4)$ – berühren, berühren sich auch die beiden letzten $(3,4,4)$ an einer Kante, so dass die Lücke zwischen diesen beiden und dem $(3,4,4,4)$ die Form eines weiteren $(3,4,4)$ hat. Jetzt haben wir aber einerseits eine Kantenumgebung $(3,4,4)(3,4,4)(4,4,3,4)$ und andererseits zwei Umgebungen $(3,4,4)(4,4,3)(3,4,4,4)$; diese existieren in der Gruppe nicht und schließen also die erste Möglichkeit aus. Betrachten wir nun den zweiten Fall, bei dem an dem 4-Eck des inneren $(3,4,4,4)$, das über die Kanten nur an weiteren 4-Ecken liegt, ein $(4,4,4)$ sitzt und an seinen Seiten jeweils ein $(3,4,4)$ in der Art klebt, dass die 3-Ecke zu den 3-Ecken des $(3,4,4,4)$ zeigen. Wenn wir diese Konstruktion mit **(III)** am $(3,4,4,4)$ um eines seiner 3-Ecke herum laufen lassen, sehen wir, dass sich jeweils zwei $(4,4,4)$ – mit einem $(4,4,3)$ dazwischen – an einer Kante berühren. Da dies aber alle Zweierpaare der drei $(4,4,4)$ um das $(3,4,4,4)$ -3-Eck tun, berühren sich also alle drei $(4,4,4)$ an einer Ecke, und die Lücke zwischen den drei $(3,4,4)$ hat die Form eines $(3,3,3)$. Also erhalten wir jeweils drei Kantenumgebungen vom

Typ $(3,4,4,4)(3,3,3)(3,4,4)$ und vom Typ $(4,4,4)(3,4,4)(3,3,3)(3,4,4)$; erstere sind mit **(V)**, letztere mit **(II)** erlaubt. Zwischen jeweils zwei $(4,4,4)$ können wir jetzt nur noch **(I)** ansetzen, womit die drei äußeren 4-Ecken der drei $(4,4,4)$ mit einem weiteren $(4,4,4)$ verbunden werden. Damit liegt aber an der äußeren Ecke des $(3,3,3)$, die auch die innere Ecke des letzten $(4,4,4)$ ist, kein $(3,4,4,4)$, womit die Eckentransitivität gebrochen ist. Auch die zweite Möglichkeit führt also zu keinem gesuchten Polychor.

Betrachten wir nun **(IV)**. Dann muss es zum Weiterkonstruieren eine Kantenumgebung mit den Keilwinkeln $(3,4,4)$ und $(4,8,4)$ geben; diese finden wir aber in dieser Gruppe nicht.

Fangen wir mit **(V)** an, kommen wir über die zweite Möglichkeit im vorletzten Absatz auch wieder zu einem Widerspruch. Und wenn wir mit **(VI)** anfangen, erhalten wir das im zweiten Absatz dieser Gruppe konstruierte Polychor. Gleiches gilt für **(VII)**.

Und fangen wir mit **(VIII)** oder **(IX)** an, dann erhalten wir, wie in Lemma 2 beschrieben, ein 4,8-Biprismachor. Denn an die 8-Ecke des $(4,4,8)$ passen höchstens diese beiden Kantenumgebungen oder **(IV)**; doch diese Umgebung kombiniert mit den anderen führt zu der Umgebung $(4,4,4)(4,4,4)(4,4,8)(4,4,8)$, welche nicht existiert.

7.2.24 Radius ≈ 1.48779

Die beiden Kantenumgebungen dieser Gruppe führen eindeutig zu einem Prismachor: Innen fangen wir mit einem $(5,5,5)$ an und kleben an alle Flächen ein $(4,4,5)$. Damit bilden wir die Kantenumgebungen $(4,5,4)(4,5,4)(5,5,5)$ und $(4,4,5)(4,4,5)(4,4,5)$. Außen herum kleben wir einen zweiten $(5,5,5)$ und schließen das Polychor [# 19].

7.2.25 Radius ≈ 1.58114

Hier haben wir die Kantenumgebungen **(I)** = $(3,3,3,3)(3,6,6)(3,6,6)$ und **(II)** = $(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)$. Fangen wir mit einem $(3,3,3,3)$ innen an und befestigen an allen Flächen ein $(3,6,6)$, dann erhalten wir **(I)** und **(II)**. Es ergeben sich an den vom ersten $(3,3,3,3)$ abgewandten 3-Ecken der $(3,6,6)$ nun Lücken, bei denen an einer Ecke vier 3-Ecke anstoßen; in diese sechs Lücken passen neue $(3,3,3,3)$, deren Hälften aus der Oberfläche heraus stehen. Nun können wir an den acht freien 6-Ecken wieder $(3,6,6)$ ankleben, jeweils vier um einen halben $(3,3,3,3)$. Die jetzt noch freien 3-Ecke der letzten $(3,6,6)$ bilden nun wieder eine Lücke in Form eines $(3,3,3,3)$ [# 20]. Bei der

ganzen Konstruktion wurden nur die beiden erlaubten Kantenumgebungen verwendet und Eckenttransitivität ist auch gegeben.

7.2.26 Radius ≈ 1.58289

Bei dieser Gruppe haben wir die drei Kantenumgebungen **(I)** = (3,4,4) (3,4,3,3) (4,4,3,4) sowie **(II)** = (4,4,3) (3,4,3,4) (3,4,4,4) und **(III)** = (3,4,4) (3,4,3,4) (3,3,3,4). Fangen wir mit der größten Zelle von **(I)**, dem (3,4,4,4), innen an; dann können wir die anderen beiden Zellen, den (3,4,4) und den (3,4,3,3), auf zwei Arten an den (3,4,4,4) ankleben. Im ersten Fall soll der (3,4,3,3) an einem 4-Eck kleben, das an seinen vier Kanten – auf dem (3,4,4,4) – wieder 4-Ecke hat. Dann liegt der (3,4,4) an einem dazu benachbarten 4-Eck, das – wieder auf dem (3,4,4,4) – zwischen zwei 3-Ecken liegt. Hier haben wir mit **(II)** nur die Möglichkeit, ein (3,4,3,4) anzulegen. Dieses berührt dann das (3,4,3,3) an einem 3-Eck und bildet mit dem (3,4,4) ein **(III)**. Nun konstruieren wir an dem dritten 4-Eck des (3,4,4) weiter; dort muss – wieder nach **(II)** – ein (3,4,3,4) sein, das dann aber eine gemeinsame Kante mit dem ersten (3,4,3,4) hat, was aber in dieser Gruppe nicht möglich ist. Also betrachten wir die zweite Art, (3,4,4) und (3,4,3,3) nach **(I)** an (3,4,4,4) anzukleben: das (3,4,3,3) auf 4-Eck zwischen zwei 3-Ecken – auf dem (3,4,4,4) – und das (3,4,4) ein (3,4,4,4)-4-Eck daneben, so dass sein 3-Eck mit einem 3-Eck vom (3,4,3,3) zusammenfällt. Am (3,4,4) haben wir dann aber eine Kante mit (4,4,3,4) und (4,4,3), welche in keiner Umgebung der Gruppe vorkommen. Fangen wir schließlich mit **(II)** oder **(III)** an, dann kommen wir beide Male zur Konstruktion von der ersten Art, wenn wir mit **(I)** anfangen, die aber zu einem Widerspruch geführt hat.

7.2.27 Radius ≈ 1.60397

In dieser Gruppe haben wir (3,4,4)(3,4,4)(3,3,3,9), (4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)(4,4,9) und (3,4,4)(4,9,4)(3,9,3,3). Fangen wir mit einem (3,9,3,3) innen an, dann können wir nach den Kantenumgebungen hier an jedem 3-Eck nur ein (3,4,4) und an den beiden 9-Ecken nur je ein (4,4,9) anlegen. Damit erhalten wir dann die drei möglichen Kantenumgebungen. Legen wir jetzt noch außen ein zweites (3,9,3,3) an, dann schließen wir das Polychor und erhalten ein Prismachor mit (3,9,3,3) als Basis.

7.2.28 Radius ≈ 1.61245

Dieser Radius führt zu den Kantenumgebungen **(I)** = (4,6,4)(3,6,6)(3,4,3,4), **(II)** = (4,4,3)(4,6,4)(6,6,3)(4,6,4) und **(III)** = (3,4,4)(4,4,6)(3,4,3,4). Fangen

wir mit **(I)** an und legen ein $(3,6,6)$ nach innen. Dann müssen wir an allen 3-Ecken ein $(3,4,3,4)$ und an allen 6-Ecken ein $(4,4,6)$ ankleben. Nach **(II)** kommen nun an den $(3,6,6)$ -Kanten zwischen zwei 6-Ecken noch $(3,4,4)$. Diese bilden dann mit den $(3,4,3,4)$ die Kantenumgebungen **(III)**. An die jetzt noch freien 4-Ecken der $(3,4,4)$ kleben wir $(4,4,6)$ an, so dass **(III)** erfüllt ist. An den Außenseiten der $(4,4,6)$ kommen weitere $(3,6,6)$ in der Art, dass deren 3-Ecke wieder mit denen der $(3,4,3,4)$ zusammenfallen usw. Der letzte $(3,6,6)$ schließt das Polychor [# 21].

7.2.29 Radius ≈ 1.61803

Dieser Gruppe gehören dreizehn Kantenumgebungen an: **(I)** = $(3,3,3) (3,3,3) (3,3,3,3,3)$, **(II)** = $(3,3,3) (3,3,3) (3,3,3,5)$, **(III)** = $(3,5,3,3) (3,5,3,3) (3,3,3,3,3)$, **(IV)** = $(3,5,3,3) (3,5,3,3) (3,3,3,5)$, **(V)** = $(3,3,3) (3,3,3) (3,3,3) (3,3,3,3,3)$, **(VI)** = $(3,3,3) (3,3,3) (3,3,3) (3,3,3,5)$, **(VII)** = $(3,3,3) (3,3,3) (3,5,3,3) (3,5,3,3)$, **(VIII)** = $(3,3,3) (3,3,3,5) (3,3,3,5)$, **(IX)** = $(3,3,3) (3,3,3,3,3) (3,3,3,3,3)$, **(X)** = $(3,3,3) (3,3,3,3,3) (3,3,3,5)$, **(XI)** = $(3,3,3) (3,5,3,3) (3,5,3,5)$, **(XII)** = $(3,5,3,3) (3,5,3,3) (5,5,5)$ und **(XIII)** = $(3,3,3) (3,3,3) (3,3,3) (3,3,3)$.

Da diese Gruppe sehr zahlreich ist, lohnt es sich, vorher durch ein paar zusätzliche Überlegungen die eine oder andere Kantenumgebung mehr auszuschließen, als es die Lemmata vermochten. Bleiben wir zunächst im 3-Dimensionalen und fragen uns, ob eine Ecke mit $(3,3,5)$ in einem konvexen uniformen Polyeder vorkommen kann. Nach kurzem Überlegen fällt erst einmal auf, dass ein 5-Eck mit zwei 3-Ecken an einer Polyederecke auf der Punktmenge des Ikosaeders $(3,3,3,3,3)$ liegt. Diese Punktmenge ist eckentransitiv. Bildet also die Ecke $(3,3,5)$ mit weiteren Ecken ein konvexes Gebilde, dessen Eckenmenge Teil der Punktmenge des Ikosaeders ist, kann dieses Gebilde dann auch über Eckentransitivität verfügen? Die Antwort lautet nein. Das 5-Eck schneidet das Gebilde vom Ikosaeder ab (hier einen weiteren Eckpunkt über dem 5-Eck; damit ist das Gebilde eine 5-Pyramide). Würde es nur aus dem 5-Eck bestehen, wäre die Eckentransitivität erhalten. Leider besitzt das Gebilde aber noch mindestens einen weiteren Eckpunkt, nämlich den am oberen Ende der 3-Ecke. Soll nun diese Ecke auf eine Ecke des 5-Ecks gedreht werden, so wird notgedrungen mindestens eine der Ecken des 5-Ecks auf eine Ecke auf dem Ikosaeder außerhalb des Gebildes, also vom Ikosaedermittelpunkt betrachtet diesseits des 5-Ecks, gedreht. Damit kann dieses Gebilde nicht über Eckentransitivität verfügen.

Bei diesen Überlegungen spielt der Polyedermittelpunkt eine wichtige Rolle. Liegt er nämlich nicht innerhalb des konvexen Polyeders, kann dieser

nicht über Eckentransitivität verfügen (es sei denn, er besteht nur aus einer regelmäßigen Fläche). Wir können nun den Abstand der Mittelpunkte jeder einzelnen Fläche eines konvexen Polyeders zum Polyedermittelpunkt als mit Vorzeichen behafteten Radius ansehen, der dann negativ ist, wenn der Polyedermittelpunkt vom Flächenmittelpunkt aus betrachtet nicht in Richtung des Polyeders, sondern aus dem Polyeder heraus (nach außen) zeigt. Mathematisch bedeutet dies, dass in der Zeichnung auf Seite 37 der Punkt o nicht überhalb von z_i (und damit von f_{ij} in den Polyeder hinein), sondern unterhalb (und damit von f_{ij} betrachtet außerhalb des Polyeders) liegt. Man stelle sich ein großes $R_{i,f_{ij}}$, ein kleineres $R_{j,f_{ij}}$ und einen Winkel φ_{ij} von etwa 30 - 45 Grad vor, so dass die Linie von z_j nach o die Linie $R_{i,f_{ij}}$ schneidet und unterhalb von z_i auf die Gerade senkrecht zu $R_{i,f_{ij}}$ trifft.

Weitere 3-dimensionale Beispiele wären Ecken mit 8-Eck, 4-Eck, 3-Eck – als Teil des Rhomben-Kubo-Oktaeders (3,4,4,4) – oder Ecken mit 10-Eck, 4-Eck, 3-Eck, 4-Eck – als Teil des Rhomben-Ikosi-Dodekaeders (3,4,5,4). In beiden Fällen wäre der Radius der größten Fläche auch negativ.

Übertragen wir jetzt diesen Sachverhalt auf die Kantenumgebungen dieser Gruppe. Ein Berechnen der Radien ergibt für die ersten beiden Kantenumgebungen **(I)** und **(II)** Folgendes: In beiden Fällen sind die drei Keilwinkel gleich; für (3,3,3) nach der Tabelle auf Seite 23 finden wir 0.391826552π und für (3,3,3,3,3) (und (3,3,3,5)) den Wert 0.767720472π . Nun folgen mit dem Seitenkosinussatz von Seite 36 die Faltwinkel $0,123548648 \pi$ zwischen zwei (3,3,3) und $0,913763953 \pi$ zwischen (3,3,3) und (3,3,3,3,3) bzw. (3,3,3,5) – hier natürlich immer nur die 3-Ecksfläche betrachtend. Und mit den Radien der Insphären der Zellen ($0,204124145$ für (3,3,3); $0,755761312$ für (3,3,3,3,3) und (3,3,3,5)) folgen die Radien $R_{(3,3,3)} = 1,497676158$ und $R_{(3,3,3,3,3)} = R_{(3,3,3,5)} = -1,309016952$ von den Zellmittelpunkten zum Polychormittelpunkt nach der Zeichnung auf Seite 37. Damit bildet hier für **(I)** und **(II)** eine Zelle eine trennende 3-dimensionale Hyperebene, die einige Ecken von einer größeren Punktmenge abschneidet und so Eckentransitivität unmöglich macht. Wir können also **(I)** und **(II)** im Folgenden ausschließen.

Fangen wir also mit **(III)** an und setzen den (3,3,3,3,3) ins Innere. Jetzt können wir an den vier Kanten zwischen (3,3,3,3,3) und (3,3,3,5) mit **(X)** nur je einen weiteren (3,3,3) ankleben. In die Lücken zwischen den (3,3,3,5) passen jetzt **(IV)**, **(III)** oder **(VII)**. Ersteres führt dazu, dass wir eine Kante mit (3,3,3,5)(3,5,3,3)(3,3,3) erhalten, welche nicht existiert. Zweiteres führt dazu, dass sich ein zweiter (3,3,3,3,3) an die beiden (3,3,3,5), an zwei (3,3,3) und an dem inneren (3,3,3,3,3) anlegt. Dies muss dann wegen der Eckentransitivität auch auf der anderen Seite des inneren (3,3,3,3,3) und der beiden (3,3,3,5) passieren. Mit **(X)** müssen wir zwischen (3,3,3,3,3) und

$(3,3,3,5)$ und wegen **(IX)** zwischen zwei $(3,3,3,3,3)$ weitere $(3,3,3)$ einfügen. Jetzt wird schon klar, dass hier pro Ecke zwei $(3,3,3,3,3)$, zwei $(3,3,3)$ und zwei $(3,3,3,5)$ benötigt werden. Wir haben nun vier Ecken zwischen dem inneren $(3,3,3,3,3)$ und den zwei neuen $(3,3,3,3,3)$, an denen schon zwei $(3,3,3)$ kleben. Ergänzen wir hier zwei weitere $(3,3,3,5)$ mit den erlaubten Kantenumgebungen, dann erhalten wir eine Kante mit $(3,5,3,3)(3,3,3)(3,5,3,3)$, welche in der Gruppe nicht existiert. Also können wir **(III)** nicht in die Lücken zwischen den ersten beiden $(3,3,3,5)$ anbauen. Letzte Möglichkeit ist hier **(VII)**: Verbinden wir also die beiden $(3,3,3,5)$ an den Kanten, die $(3,3,3,3,3)$ noch an einer Ecke berühren, mit zwei $(3,3,3)$. Zwischen diesen $(3,3,3)$ und den $(3,3,3)$ zwischen $(3,3,3,5)$ und $(3,3,3,3,3)$ passt mit **(VI)** nur je ein weiterer $(3,3,3)$, wobei zwischen je zweien, die sich auf derselben Seite vom $(3,3,3,3,3)$ und von den $(3,3,3,5)$ befinden, wieder ein $(3,3,3)$ an das $(3,3,3,3,3)$ angeklebt wird. Damit benutzen wir auch **(V)** und **(XIII)**. An den beiden jetzt vollständig umschlossenen Polychor-Ecken stoßen ein $(3,3,3,3,3)$, zwei $(3,3,3,5)$ und sieben $(3,3,3)$ so zusammen, dass drei $(3,3,3)$ über Flächen am $(3,3,3,3,3)$ kleben. Bauen wir jetzt weiter und kleben am freien 5-Eck eines $(3,3,3,5)$ ein weiteres $(3,3,3,5)$ an ($(3,5,3,5)$ und $(5,5,5)$ sind nicht möglich, da sie an den ersten beiden Ecken nicht vorkamen). Dieser $(3,3,3,5)$ berührt – zusammen mit dem $(3,3,3,5)$, an dem er klebt – den inneren $(3,3,3,3,3)$ noch an einer Ecke. Also benötigen wir für Eckentransitivität hier nur noch sieben $(3,3,3)$. Füllen wir also diese Lücke mit sieben $(3,3,3)$ – zwei zwischen $(3,3,3,3,3)$ und $(3,3,3,5)$, zwei weitere an den noch freien 3-Ecken des $(3,3,3,3,3)$ und drei an den noch freien 3-Ecken des $(3,3,3,5)$ um diese Ecke. Jetzt kleben über Flächen aber nur zwei $(3,3,3)$ am $(3,3,3,3,3)$; somit ist die Eckentransitivität nicht erfüllt und die letzte Möglichkeit, die mit **(III)** anfängt, ist auch nicht möglich.

Fangen wir also mit **(IV)** an, kleben zwei $(3,3,3,5)$ am 5-Eck zusammen und ein drittes $(3,3,3,5)$ an eine Kante zwischen den beiden ersten. An den beiden 5-Ecken des dritten $(3,3,3,5)$ kann mit **(IV)** nur je ein weiteres $(3,3,3,5)$ und in die Lücken zwischen dem dritten und den ersten beiden $(3,3,3,5)$ mit **(VIII)** je ein $(3,3,3)$ kommen. Außerdem können wir die Lücken zwischen den letzten beiden $(3,3,3,5)$ und den ersten beiden nach **(VII)** und **(VIII)** auch nur mit $(3,3,3)$ schließen. Wir erhalten also zwei Polychorecken, an die vier $(3,3,3,5)$ und vier $(3,3,3)$ grenzen. Betrachten wir jetzt das 5-Eck zwischen den ersten beiden $(3,3,3,5)$. An der ersten Kante liegt der dritte $(3,3,3,5)$. An der nächsten Kante, der zweiten, liegen zwei $(3,3,3)$; genauso an der vorherigen, der fünften Kante. Damit Eckentransitivität erfüllt ist, muss an der dritten und an der vierten Kante wieder ein $(3,3,3,5)$ liegen. Zusammen mit den weiteren $(3,3,3,5)$, die an die freien 5-Ecke kommen, liegen damit

aber an der Ecke zwischen dritter und vierter 5-Eck-Kante jetzt schon sechs $(3,3,3,5)$, was die Eckentransitivität bricht. **(IV)** kann also nicht vorkommen.

Nun fangen wir mit **(V)** an und setzen den $(3,3,3,3,3)$ wieder nach innen. Gehen wir erst einmal davon aus, dass neben diesem einen $(3,3,3,3,3)$ an jeder Ecke nur noch $(3,3,3)$ vorkommen. Kleben wir also an den fünf zu einer Ecke des $(3,3,3,3,3)$ führenden Kanten mit **(V)** drei weitere $(3,3,3)$ auf die 3-Ecke und fünf auf die Kanten. Letztere fünf wollen wir Kanten- $(3,3,3)$ nennen. Auf diese Kanten- $(3,3,3)$ kleben wir oben je einen weiteren $(3,3,3)$ mit **(XIII)**, so dass diese eine gemeinsame Kante haben. Da am inneren $(3,3,3,3,3)$ kein weiterer $(3,3,3,3,3)$ liegen soll, können wir außerdem an den noch freien 3-Ecken der Kanten- $(3,3,3)$ je einen weiteren $(3,3,3)$, einen Außen- $(3,3,3)$ anlegen. Jetzt erhalten wir eine Teilabwicklung, an der schon einige Nachbarecken zur ersten vollständig eingeschlossenen Ecke sichtbar sind. Betrachten wir die Ecke, die zwischen den fünf auf den Kanten- $(3,3,3)$ klebenden $(3,3,3)$ am weitesten außen ist: An dieser Ecke befinden sich schon fünf $(3,3,3)$. Wie kann dort nun ein $(3,3,3,3,3)$ anliegen, der ja wegen der Eckentransitivität hier sein muss? Eine Möglichkeit wäre, dass er diese Ecke nur mit der Spitze berührt, wir also auf den oberen fünf $(3,3,3)$ noch einmal fünf $(3,3,3)$ und zwischen diesen weitere fünf $(3,3,3)$ kleben müssen, um eine Lücke zu erzeugen, in die ein $(3,3,3,3,3)$ mit der Spitze passt. Dann können wir aber an den Ecken, die von zwei Kanten- $(3,3,3)$ berührt werden, keinen $(3,3,3,3,3)$ einfügen, der nicht den inneren und den neuen $(3,3,3,3,3)$ berührt. Eine andere Möglichkeit ist, den $(3,3,3,3,3)$ auf ein oberes 3-Eck der $(3,3,3)$ auf den Kanten- $(3,3,3)$ zu kleben. Dieser $(3,3,3,3,3)$ berührt dann ein Kanten- $(3,3,3)$ an einer Kante und ein Außen- $(3,3,3)$ an einer Fläche. Zwischen dem inneren und dem zweiten $(3,3,3,3,3)$ liegt genau ein Kanten- $(3,3,3)$, der beide an zwei gegenüberliegenden Kanten berührt. Können wir jetzt an den anderen Ecken auch je einen $(3,3,3,3,3)$ anlegen, ohne dass diese sich berühren? Verfahren wir in der oben beschriebenen Art mit dem ganzen inneren $(3,3,3,3,3)$ und kleben also drei Schichten von $(3,3,3)$ auf die Außenflächen, dann sehen wir, dass wir sechs weitere $(3,3,3,3,3)$ so um die innere Zelle orientieren können, dass sie sich untereinander nicht berühren und immer ein Kanten- $(3,3,3)$ zwischen sich und dem inneren $(3,3,3,3,3)$ und untereinander haben. Haben nun mit dieser Konstruktion alle Ecken in dieser lokalen Umgebung genau einen $(3,3,3,3,3)$? Schauen wir uns die konstruierte Teilabwicklung genauer an und betrachten dabei insbesondere nur die sieben $(3,3,3,3,3)$ zusammen mit den Kanten- $(3,3,3)$ und je Kanten- $(3,3,3)$ pro 3-Eck einen weiteren $(3,3,3)$, der zwischen $(3,3,3,3,3)$ und Kanten- $(3,3,3)$ liegt: Es fällt zuerst einmal auf, dass die sieben $(3,3,3,3,3)$ in einer gewissen Orientierung zueinander stehen. So wie der Ikosaeder im Hexaeder

liegt, wobei sechs sich nicht berührende Kanten auf den sechs Flächen des Hexaeders sitzen und die Ikosaederkanten, die zu benachbarten Hexaederflächen gehören, nicht aufeinander zeigen, so liegen diese sieben $(3,3,3,3,3)$ hier wie die $(4,4,4)$ eines 8-Zellers, wobei die Ikosaederkanten, die mit den Hexaederflächen korrespondieren, welche im 8-Zeller zusammenfallen, auch wieder andere Orientierung haben (d.h. nicht parallel sind). Eine komplette Konstruktion würde also acht $(3,3,3,3,3)$ und die dazwischen liegenden $(3,3,3)$ benötigen und wäre widerspruchsfrei. Die Lücken zwischen jeweils vier $(3,3,3,3,3)$ haben aber leider genau die Form eines Ikosaeders. Sie bestehen aus je zwanzig $(3,3,3)$. Außerdem liegen an den Mittelpunkten dieser Lücken keine $(3,3,3,3,3)$! Um also Eckentransitivität zu gewährleisten, müssen diese Zwanziger-Gruppe durch je einen $(3,3,3,3,3)$ ersetzt werden. Damit berühren sich jetzt an jeder Ecke ein ursprüngliches $(3,3,3,3,3)$ und zwei neue Loch- $(3,3,3,3,3)$ zusammen mit fünf $(3,3,3)$. Dabei wurden **(V)** und **(IX)** benutzt. Dieses Polychor hat also acht $(3,3,3,3,3)$ – für die acht Zellen des 8-Zellers – und 16 $(3,3,3,3,3)$ – für die 8-Zeller-Ecken – also insgesamt 24 $(3,3,3,3,3)$ und dazwischen $(3,3,3)$ [# 22]. Bleibt die Frage, ob genau zwei $(3,3,3,3,3)$, genau vier, fünf usw. $(3,3,3,3,3)$ zusammen mit $(3,3,3)$ zu einem uniformen Polychor führen und ob wir **(V)** auch mit den anderen Zellen $(3,3,3,5)$, $(3,5,3,5)$ und/oder $(5,5,5)$ kombinieren können.

Betrachten wir den Fall, dass an jeder Ecke zwei $(3,3,3,3,3)$ anstoßen und wir mit **(V)** anfangen. Setzen wir also wieder ein $(3,3,3,3,3)$ ins Innere und kleben drei $(3,3,3)$ nach **(V)** an eine Kante. An einer Ecke dieser ersten Kante soll nun ein weiterer $(3,3,3,3,3)$ angeklebt werden. Dazu gibt es drei Möglichkeiten: Der zweite $(3,3,3,3,3)$ wird mit der Fläche auf ein 3-Eck des mittleren der drei $(3,3,3)$ geklebt und die Lücken zwischen den beiden $(3,3,3,3,3)$ mit $(3,3,3)$ – nach **(V)** – gefüllt, so dass sich die beiden $(3,3,3,3,3)$ nur an einer Ecke berühren. Oder der zweite $(3,3,3,3,3)$ liegt mit einer Fläche auf dem ersten $(3,3,3,3,3)$, so dass er entweder einen der beiden Seiten- $(3,3,3)$ der ersten **(V)** an einer Fläche berührt oder dass er den mittleren $(3,3,3)$ nur an einem Punkt berührt. Im ersten Fall bedeutet das, dass sich die beiden $(3,3,3,3,3)$ nur mit der Spitze berühren und von zehn $(3,3,3)$ mit **(V)** verbunden werden. Betrachten wir jetzt drei dieser verbindenden $(3,3,3)$, die eine gemeinsame Kante haben. Der äußere Punkt dieser Kante ist auch Ecke eines $(3,3,3,3,3)$. Also muss dort die Ecke eines weiteren $(3,3,3,3,3)$ auftreten. Wir kleben um diese Ecke also auch einen Verbindungsring aus zehn $(3,3,3)$ an, der natürlich teilweise in die ersten zehn $(3,3,3)$ zwischen den ersten beiden $(3,3,3,3,3)$ hineinreicht. Jetzt können wir einen dritten $(3,3,3,3,3)$ so einfügen, dass er diese Ecke nur mit seiner Spitze berührt. Dabei muss er aber auf der Fläche des mittleren der drei $(3,3,3)$ – durch die wir die Ecke

bestimmt haben – liegen und somit den anderen der ersten beiden $(3,3,3,3,3)$ an einer Fläche berühren, was die Eckentransitivität bricht. Im zweiten Fall passen mit **(V)** und **(IX)** noch zwei $(3,3,3)$ in die Lücken und bilden eine große Lücke, in die ein $(3,3,3,3,3)$ passen würde. Der $(3,3,3,3,3)$ ist aber ausgeschlossen, da dies der Fall des vorhergehenden Absatzes wäre. Also können dort fünf weitere $(3,3,3)$ eingeklebt werden. Damit haben wir eine erste Eckenumgebung vollständig bestimmt. (Auf dieses Ergebnis kommen wir auch mit dem letzten Fall für das zweite $(3,3,3,3,3)$.) Betrachten wir jetzt die äußere Kante zwischen dem $(3,3,3)$ der ersten **(V)**, der zwischen den beiden $(3,3,3,3,3)$ und dem mittleren $(3,3,3)$ der ersten **(V)** ist. Diese Kante verbindet zwei Polychorecken, an denen jeweils schon ein $(3,3,3,3,3)$ dran ist. Hier gibt es zwei Möglichkeiten, an beiden Ecken einen weiteren $(3,3,3,3,3)$ so anzukleben, dass sich zwei $(3,3,3,3,3)$ an einem 3-Eck berühren: Verlängern wir die Kante an beiden Seiten über die Ecken hinaus, dann können die zwei neuen $(3,3,3,3,3)$ entweder auf der gleichen Seite dieser Linie sein, oder auf verschiedenen Seiten (Dass beide Seiten equivalent sind, sieht man schnell, da beide Konfigurationen an der Ebene durch die Linie und der Verbindungslinie durch die Mittelpunkte der ersten beiden $(3,3,3,3,3)$ spiegelsymmetrisch sind.) Im ersten Fall bedeutet das, dass auf einem $(3,3,3,3,3)$ zwischen zwei 3-Ecken, die zum nächsten $(3,3,3,3,3)$ führen, genau zwei andere 3-Ecke liegen müssen, wir also auf dem $(3,3,3,3,3)$ die Symmetrien des Tetraeders benutzen. Damit würden wir beim Weiterbau eine Art Würfel (genauer einen Hyperwürfel bzw. 8-Zeller) bauen, in dessen Ecken $(3,3,3,3,3)$ hängen, wobei sich benachbarte $(3,3,3,3,3)$ über ein 3-Eck berühren. In diesem Würfel liegt in der Mitte wieder ein Punkt, der nicht mit einem $(3,3,3,3,3)$ in Kontakt steht. Und ein Ersetzen dieser zwanzig $(3,3,3)$ um den Punkt durch einen weiteren $(3,3,3,3,3)$ führt zur Konstruktion im letzten Absatz, bei der pro Ecke drei $(3,3,3,3,3)$ vorkommen [# 22]. Also versuchen wir den zweiten Fall, dass die beiden neuen $(3,3,3,3,3)$ auf verschiedenen Seiten der gedachten Linie liegen. Dann füllen wir mit **(V)** und **(IX)** ein paar $(3,3,3)$ auf und sehen, dass sich die beiden neuen $(3,3,3,3,3)$ nur an einer Ecke, nicht aber an einer Fläche berühren.

Mehr als drei $(3,3,3,3,3)$ pro Ecke sind auch nicht möglich, da bei zwei $(3,3,3,3,3)$ pro Ecke durch **(IX)** oder **(V)** schon mindestens zwei $(3,3,3)$ an dieser Ecke nötig sind und ein dritter $(3,3,3,3,3)$ mindestens zwei weitere $(3,3,3)$ mitbringt, so dass der Raumwinkel für einen vierten $(3,3,3,3,3)$ nicht mehr ausreicht.

Untersuchen wir schließlich die Möglichkeiten, **(V)** mit den Zellen $(3,3,3,5)$, $(3,5,3,5)$ oder $(5,5,5)$ zu kombinieren. Stellen wir $(3,3,3,3,3)$ mit

(**V**) an einer Kante – d.h. mit drei $(3,3,3)$ – ins Innere und betrachten eine Ecke dieser Kante. Soll hier mit $(3,3,3,5)$, $(3,5,3,5)$ oder $(5,5,5)$ kombiniert werden, so dass ein uniformes Polychor daraus resultiert, dann müssen diese Zellen auch an dieser Ecke anstoßen. Fangen wir mit $(3,3,3,5)$ an. Nach den möglichen Kantenumgebungen kann das $(3,3,3,5)$ nicht so orientiert sein, dass es auf ein 3-Eck neben den drei $(3,3,3)$ geklebt ist und sein 5-Eck auf ein $(3,3,3)$ zeigt – es existiert kein $(3,3,3,3,3)(3,3,3)(3,5,3,3)$. Auch kann es nicht auf der gleichen Fläche angeklebt sein und sein 5-Eck damit in eine andere Richtung zeigen, da dann als einzig mögliche Kantenumgebung (**III**) mit $(3,5,3,3)(3,5,3,3)(3,3,3,3,3)$ in Frage kommt; und diese Umgebung haben wir schon ausgeschlossen. Also kann $(3,3,3,5)$ nur auf dem 3-Eck des $(3,3,3,3,3)$ kleben, das die erste (**V**) nur an der Ecke berührt. Aber auch dann muss $(3,5,3,3)(3,5,3,3)(3,3,3,3,3)$ vorkommen, was wir ja bereits ausgeschlossen haben. Damit kann (**V**) nicht mit $(3,3,3,5)$ kombiniert werden. Also betrachten wir wieder einen $(3,3,3,3,3)$ mit (**V**). $(3,5,3,5)$ kann mit $(3,3,3,3,3)$ keine gemeinsame Kante haben, da diese nicht in der Gruppe vorkommt. Also kann $(3,5,3,5)$ nur auf dem mittleren $(3,3,3)$ von (**V**) angeklebt werden. Dann haben wir aber eine Kantenumgebung mit $(3,3,3)(3,3,3)(3,5,3,5)$, welche ebenfalls nicht vorkommt. Und eine Kombination von (**V**) mit $(5,5,5)$ ist insofern nicht möglich, da beide keine gemeinsamen Flächen haben, an denen sie zusammengefügt werden können, und alle Zellen, die beide Flächen haben und somit als Verbinder fungieren könnten, ausgeschlossen sind. Damit haben wir alle Kombinationen mit (**V**) untersucht.

Fangen wir also mit (**VI**) an und setzen $(3,3,3,5)$ nach innen. An einer Kante zwischen zwei 3-Ecken kleben wir drei 3-Ecke, zwei an den 3-Ecken, eines dazwischen an die $(3,3,3,5)$ -Kante, an. An einem 5-Eck des $(3,3,3,5)$ können wir jetzt entweder einen weiteren $(3,3,3,5)$ mit (**VII**) oder einen $(3,5,3,5)$ mit (**XI**) ankleben. Im ersten Fall können wir zwischen den beiden $(3,3,3,5)$ mit (**VII**) nur zwei $(3,3,3)$ kleben; die Benutzung von (**IV**) wurde oben schon ausgeschlossen. Also verbinden wir die $(3,3,3,5)$ mit $(3,3,3)$ an allen gemeinsamen Kanten. Zwischen zwei $(3,3,3)$ -Paaren ist dann an einem $(3,3,3,5)$ – bis auf bei (**VI**) – noch ein 3-Eck mit Kantenumgebungen $(3,3,3,5)(3,3,3)$ zu sehen. Dort passt entweder mit (**VIII**) ein weiterer $(3,3,3,5)$, dessen eines 5-Eck an der Ecke zwischen den beiden $(3,3,3)$ -Paaren klebt und an dem nur ein weiterer $(3,3,3,5)$ angeklebt werden kann. Damit ist eine Ecke umschlossen. An der anderen Seite haben wir eine Kante mit $(3,5,3,3)(3,5,3,3)$ – zusammenhängend an einem 3-Eck – an der mit (**XII**) nur ein $(5,5,5)$ passt, was aber die Eckentransitivität zur ersten umschlossenen Ecke bricht. Oder wir kleben an das noch freie 3-Eck zwischen zwei $(3,3,3)$ -Paaren am $(3,3,3,5)$ mit (**VI**) drei weitere $(3,3,3)$ – eines auf die Fläche, zwei an die

Kanten zwischen die $(3,3,3)$. Und zwischen diesen passen mit **(XIII)** nur noch je ein weiteres $(3,3,3)$, womit die Ecken umschlossen werden. An sie grenzen nun zwei $(3,3,3,5)$ – mit einem 5-Eck – und zwölf $(3,3,3)$. Aus der Transitivität der Ecken müssen wir am freien 5-Eck des inneren $(3,3,3,5)$ noch einmal ein $(3,3,3,5)$ und damit einen weiteren Ring von $(3,3,3)$ anbauen, bis an den Ecken zwischen innerer Zelle und dem dritten $(3,3,3,5)$ auch wieder je zwölf $(3,3,3)$ liegen. Nun bekommen wir an den äußeren Ecken, die noch nicht mit zwei $(3,3,3,5)$ in Kontakt stehen, Kanten mit $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)$. Dort können entweder mit **(XIII)** zwei weitere $(3,3,3)$ angeklebt werden, womit auch an der nächsten freien Kante dieser Art zwei weitere $(3,3,3)$ folgen müssen. Dies würde aber die Eckentransitivität brechen, da nun Ecken mit zwanzig $(3,3,3)$ existieren. Oder wir kleben mit **(VI)** ein $(3,3,3,5)$ an die Kante. Dabei muss $(3,3,3,5)$ mit zwei Kanten dieser Art, die an einem äußeren 3-Eck liegen, **(VI)** ergeben. Dadurch sind seine 5-Ecke so orientiert, dass sie senkrecht zur Ausrichtung der 5-Ecke des inneren $(3,3,3,5)$ liegen. Kleben wir so an all diesen Ecken $(3,3,3,5)$, so bilden sie eine Art Ring um den inneren $(3,3,3,5)$. Und da pro Ecke eines 5-Ecks des inneren $(3,3,3,5)$ genau zwei $(3,3,3,5)$ im Ring zu finden sind, bilden zehn $(3,3,3,5)$ den Ring. Aus Gründen der Symmetrie und der Eckentransitivität lassen sich an dem zweiten und dritten $(3,3,3,5)$ – sie liegen direkt am inneren $(3,3,3,5)$ – so viele weitere $(3,3,3,5)$ mit 5-Eck auf 5-Eck ankleben, bis diese sich um den ersten Ring wickeln und somit auch aus zehn $(3,3,3,5)$ bestehen müssen. Aufgefüllt mit den $(3,3,3)$ in derselben Art und Weise schließt sich das Polychor [# 23].

Versuchen wir nun, die Kantenumgebung **(VII)** mit **(VIII)** bis **(XIII)** zu kombinieren. Beginnen wir mit zwei $(3,5,3,3)$, die an den 5-Ecken zusammenkleben und legen an einer gemeinsamen Kante zwei $(3,3,3)$ an. Da dies nach den restlichen Kantenumgebungen die einzige Möglichkeit für die gemeinsamen Kanten der beiden $(3,5,3,3)$ ist, setzen wir an an anderen gemeinsamen Kanten ebenfalls je zwei $(3,3,3)$. Jetzt können wir an einem beliebigen freien 3-Eck eines $(3,3,3,5)$ mit **(VIII)** nur noch einen weiteren $(3,3,3,5)$ ankleben. Damit bekommen wir jedoch eine Kante mit zwei $(3,3,3,5)$, die sich an einem 3-Eck berühren, und können dort nur noch – mit **(XII)** – ein $(5,5,5)$ ansetzen. Damit brechen wir aber die Eckentransitivität zu den Ecken zwischen den ersten beiden $(3,5,3,3)$. Somit kann **(VII)** nicht allein mit **(VIII)** bis **(XIII)** kombiniert werden.

Also fangen wir jetzt mit **(VIII)** an. Da hier die Kante $(3,5,3,3)(3,5,3,3)$ vorkommt und diese nur nach **(XII)** mit einem $(5,5,5)$ ergänzt werden kann, setzen wir diese große Zelle ins Innere. Dann können wir an all seine 5-Ecke $(3,5,3,3)$ kleben, wobei benachbarte $(3,5,3,3)$ sich an einem 3-Eck berühren. Pro Ecke des $(5,5,5)$ bekommen wir jetzt zwischen den $(3,5,3,3)$ Lücken, die

nur von $(3,3,3)$ gefüllt werden können. An den äußeren 5-Ecken der $(3,5,3,3)$ passen nun aber keine weiteren $(5,5,5)$, da diese in dieser Gruppe keine gemeinsame Kante mit $(3,3,3)$ haben dürfen. Somit ist eine eckentransitive Weiterkonstruktion nicht möglich.

Fangen wir jetzt mit **(IX)** an. Dann können wir an den anderen beiden Kanten zwischen den $(3,3,3,3,3)$ nur je einen weiteren $(3,3,3)$ anlegen. Jetzt passt aber zwischen den $(3,3,3)$ und den $(3,3,3,3,3)$ entweder **(IX)** oder **(X)**. Ersterer führt dann letztendlich zu einem Polychor mit drei $(3,3,3,3,3)$ an jeder Ecke, der als [# 22] schon identifiziert wurde, letzterer führt zu einer Kante mit $(3,5,3,3)(3,3,3,3,3)$, welche wir in den Kantenumgebungen **(IX)** bis **(XIII)** nicht mehr finden.

Die Kantenumgebung **(X)** kann nicht vorkommen, da eine Kombination von $(3,3,3,5)$ und $(3,3,3,3,3)$, wie bereits gezeigt, nicht möglich ist. Also betrachten wir **(XI)** und kleben an eine Kante des $(3,5,3,5)$ ein $(3,3,3)$ und ein $(3,3,3,5)$. An den anderen zwei Kanten zwischen $(3,5,3,5)$ und $(3,3,3)$ müssen wir genauso verfahren, wodurch jeweils zwei der drei $(3,3,3,5)$ an einem 3-Eck zusammenfallen und damit eine Kante mit $(\underline{3},5,3,3)(\underline{3},5,3,3)$ – zusammengefügt am 3-Eck – entsteht. Dort passt nur – mit **(XII)** – ein $(5,5,5)$, welches dann aber die Eckentranstivität bricht. Gleiches Argument gilt auch, wenn wir bei **(XII)** mit einem $(5,5,5)$ innen anfangen: Nach einer Schicht $(3,3,3,5)$ können wir keinen weiteren $(5,5,5)$ anbringen.

Bleibt also die letzte Kantenumgebung **(XIII)**, die wir auch nur noch allein berücksichtigen müssen: Hier kommen dann um jede Kante fünf $(3,3,3)$ zusammen. Und da nur eine Art von Zellen vorkommt, können wir das daraus entstehende Polychor sofort als einen 600-Zeller identifizieren [# 24].

7.2.30 Radius ≈ 1.65831

Die Kantenumgebungen $(4,4,4) (4,4,6) (4,4,6)$, $(4,4,4) (4,6,4) (4,6,6)$ und $(4,6,4) (4,6,4) (6,6,4)$ bilden diese Gruppe. Wenn wir innen mit einem $(4,6,6)$ anfangen und nach der dritten Kantenumgebung an alle 6-Ecken $(4,4,6)$ und nach der zweiten Umgebung an alle 4-Ecken $(4,4,4)$ kleben, erhalten wir zwischen den Prismen die erste Kantenumgebung. Jetzt brauchen wir außen nur noch einen zweiten $(4,6,6)$ anzulegen und schließen damit das Polychor [# 25].

7.2.31 Radius ≈ 1.69353

Zu diesem Radius gibt es die Kantenumgebungen **(I)** = $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,5)(4,4,5)$, **(II)** = $(3,4,4)(4,5,4)(3,5,3,5)$ und **(III)** = $(4,4,3)(4,4,5)(4,4,3) (4,4,5)$.

Wenn wir mit **(I)** anfangen, dann bekommen wir zwischen den beiden $(4,4,3)$ eine Kante mit $(3,4,4)(3,4,4)$; diese existiert in dieser Gruppe nicht. Also fangen wir mit **(II)** an, setzen einen $(3,5,3,5)$ nach innen und kleben an jedes 5-Eck ein $(4,4,5)$ und an jedes 3-Eck ein $(3,4,4)$. Damit erhalten wir zwischen den Prismen die Kantenumgebung **(III)**. Nun können wir nur noch einen zweiten $(3,5,3,5)$ außen herum legen und schließen so das Polychor [# 26].

7.2.32 Radius ≈ 1.73205

In dieser Gruppe haben wir die Kantenumgebung $(4,4,4) (3,4,3,4) (3,4,3,4)$. Wenn wir mit einem $(3,4,3,4)$ innen anfangen und an alle 4-Ecken $(4,4,4)$ und an alle 3-Ecken $(3,4,3,4)$ kleben, haben wir nur die eine erlaubte Kantenumgebung benutzt. In die entstandenen Lücken, die aus 4-Ecken umgeben von vier 3-Ecken bestehen, passen wieder $(3,4,3,4)$. Dann sehen wir Lücken aus drei 4-Ecken um eine Ecke, wo wieder $(4,4,4)$ passen usw., bis ein letzter $(3,4,3,4)$ außen das Polychor schließt [# 27].

7.2.33 Radius ≈ 1.74756

Hier erhalten wir analog zu etlichen Konstruktionen zuvor (die letzte beim Radius 1.60397) ein 10-antiprismatisches Prismachor, also ein Prismachor mit $(3,3,3,10)$ als Basis.

7.2.34 Radius ≈ 1.75142

Für diesen Radius bekommen wir nur $(4,4,3)(3,4,4)(3,3,3)(3,4,3,4)$. Betrachten wir diese Kantenumgebung genauer, dann sehen wir sofort, dass wir eine Kantenumgebung bekommen, die $(3,4,4)$ und $(3,4,3,4)$ nebeneinander beinhalten muss; diese existiert aber nicht.

7.2.35 Radius ≈ 1.84391

Die Kantenumgebungen **(I)** = $(4,4,3) (4,6,6) (4,6,6)$, **(II)** = $(3,4,4) (3,6,6) (4,6,6)$ und **(III)** = $(6,6,3) (6,6,4) (6,6,4)$ bilden diese Gruppe. Fangen wir also mit der größten Zelle, dem $(4,6,6)$, innen an und kleben an einer Kante **(I)** an. Dann liegen an dem inneren $(4,6,6)$ und dem zweiten $(4,6,6)$ jetzt zwei weitere Kanten, an denen mit $(4,4,3)$ wieder **(I)** konstruiert werden kann. Und zwischen dem inneren $(4,6,6)$ und den $(4,4,3)$ passen – mit **(I)** – weitere $(4,6,6)$, an denen wieder $(4,4,3)$ zum inneren $(4,6,6)$ passen. Dies geht dann so weiter, bis alle 4-Ecke des inneren $(4,6,6)$ mit $(3,4,4)$ in einer gewissen Orientierung belegt sind und die Hälfte aller 6-Ecke der inneren

Zelle – also vier – an $(4,6,6)$ anliegen. An die noch freien 6-Ecken der inneren Zelle passen jetzt mit **(II)** und **(III)** nur noch vier $(3,6,6)$. Dann erhalten wir weitere Lücken, die aus einem 3-Eck innen und drei 4-Ecken zyklisch am 3-Eck bestehen. Diese füllen wir nach **(I)** und **(II)** mit $(3,4,4)$ auf und können jetzt außen nur noch ein letztes $(3,6,6)$ umlegen, um das Polychor zu schließen [# 28].

7.2.36 Radius ≈ 1.84776

Zehn Kantenumgebungen gehören zu dieser Gruppe: **(I)** = $(3,4,4)(4,8,4)(3,8,8)$, **(II)** = $(3,4,4)(3,3,3,3)(3,4,4,4)$, **(III)** = $(4,4,3)(3,4,4)(3,3,3,3)(3,4,4)$, **(IV)** = $(4,4,3)(4,4,3,4)(4,4,3,4)$, **(V)** = $(4,4,3)(4,4,3,4)(4,4,8)$, **(VI)** = $(4,4,3)(4,4,8)(4,4,8)$, **(VII)** = $(4,8,4)(4,8,4)(4,4,3,4)$, **(VIII)** = $(4,8,4)(4,8,4)(4,4,8)$, **(IX)** = $(4,8,4)(4,8,4)(8,8,3)$ und **(X)** = $(4,4,3)(3,4,4)(3,4,4,4)$.

Fangen wir mit **(I)** an und setzen einen $(3,8,8)$ nach innen. Dann kleben wir an allen 8-Ecken $(4,4,8)$ und an allen 3-Ecken $(3,4,4)$ an. Damit benutzen wir auch **(VI)** und **(IX)**. Jetzt können wir durch die Eckentransitivität außen nur noch einen weiteren $(3,8,8)$ anlegen, schließen damit das Polychor und erhalten ein Prismachor mit $(3,8,8)$ als Basis [# 29].

Beginnen wir nun mit **(II)** und legen $(3,4,4,4)$ nach innen. An den zwei noch freien Kanten zwischen $(3,4,4,4)$ und $(3,3,3,3)$ passen nur – auch mit **(II)** – weitere $(3,4,4)$. An den sechs Kanten zwischen innerer Zelle und $(3,4,4)$ würden nun **(IV)** und **(V)** passen; letztere ist aber möglich, da $(4,8,4)(4,4,3)$ in keiner Kantenumgebung existiert. An den sechs Kanten zwischen $(3,3,3,3)$ und $(3,4,4)$ würden **(II)** und **(III)** passen; auch hier ist letztere nicht möglich, da $(4,4,3,4)(4,4,3)(3,4,4)$ in dieser Gruppe nicht vorkommt. Somit passen an beiden Kanten nur weitere $(3,4,4,4)$ mit **(II)** und **(IV)**. Damit können wir nun auch alle weiteren Lücken eindeutig mit $(3,4,4)$, $(3,3,3,3)$ und $(3,4,4,4)$ füllen, bis sich das Polychor schließt [# 30].

Betrachten wir nun **(III)** und setzen einen $(3,3,3,3)$ nach innen. Dann können wir an allen 3-Ecken mit **(III)** – eine Kombination mit **(II)** wurde ja im vorhergehenden Absatz ausgeschlossen, somit kann auch **(X)** hier nicht vorkommen – nur $(3,4,4)$ ankleben. An die Kanten des $(3,3,3,3)$ zwischen den $(3,4,4)$ kommen jetzt noch je ein weiteres $(3,4,4)$. Damit erhalten wir Lücken, in die nur $(3,3,3,3)$ passen. An deren freien 3-Ecken kommen wieder – mit **(III)** – $(3,4,4)$, an den freien Kanten weitere $(3,4,4)$ und in die dann entstehenden Lücken wieder $(3,3,3,3)$ usw., bis zum Schluss ein letzter $(3,3,3,3)$ außen angelegt wird und das Polychor schließt [# 31].

Versuchen wir nun, **(IV)** mit **(V)** bis **(X)** zu kombinieren, da **(IV)** allein keine Fortführung an 3-Ecken hat. Dies gilt aber auch für Kombinationen

mit **(V)** bis **(IX)**; lediglich **(X)** erlaubt theoretisch eine Fortführung an den 3-Ecken. Setzen wir also ein $(3,4,4,4)$ ins Innere. Dann gibt es drei Möglichkeiten für **(IV)**. Erstens kann der zweite $(3,4,4,4)$ mit dem ersten $(3,4,4,4)$ so über ein 4-Eck verbunden sein, dass dieses 4-Eck jeweils über Kanten nur mit anderen 4-Ecken auf den beiden $(3,4,4,4)$ verbunden ist, dass es jeweils an zwei 3-Ecken auf den beiden $(3,4,4,4)$ liegt oder dass es auf dem einen $(3,4,4,4)$ über Kanten an vier 4-Ecken und auf dem anderen an zwei 3-Ecken liegt. Im ersten Fall bekommen wir eine Kante mit $(3,4,4)$ $(3,4,4,4)$ – verbunden über ein 4-Eck – an der wir nicht weiterkonstruieren können. Im zweiten Fall erhalten wir $(3,4,4,4)$ $(3,4,4,4)$ – auch wieder verbunden über ein 4-Eck – wo wir ebenfalls nicht weiterbauen können. Und im dritten Fall können wir an einer entstehenden Kante der Form $(3,4,4,4)(4,4,3,4)$ nicht fortfahren. Somit gibt es mit **(IV)** keine weiteren Kombinationen.

Fangen wir jetzt mit **(V)** an und nehmen innen einen $(3,4,4,4)$. Jetzt haben wir zwei Möglichkeiten **(V)** anzubauen: erstens so, dass das 3-Eck vom $(3,4,4)$ auf ein 3-Eck des $(3,4,4,4)$ zeigt, und zweitens, dass das 8-Eck des $(4,4,8)$ auf ein 3-Eck des $(3,4,4,4)$ zeigt. Ersteres ist aber nicht möglich, da wir $(3,4,4,4)(3,4,4)$ – 4-Ecke aufeinander – nur in **(II)** finden, deren Kombination aber schon ausgeschlossen wurde. Letzteres ist auch nicht möglich, da $(3,4,4,4)(4,8,4)$ in dieser Gruppe nicht existiert.

Betrachten wir also **(VI)**. Nur mit **(X)** ist theoretisch eine Weiterführung am 3-Eck möglich. Doch gibt es in **(X)** kein $(4,4,8)$, so dass weitere Kombinationen mit **(VI)** ausgeschlossen sind.

Also schauen wir uns **(VII)** an: Diese Kantenumgebung können wir aber auch nicht weiterbauen, da wir zu diesem Radius keine Kantenumgebung mit $(3,4,4,4)(4,4,8)$ haben.

Gehen wir also zur nächsten Kantenumgebung: **(VIII)**. Diese erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 2, da eine Kombination mit **(IX)** nicht möglich ist – dort liegen $(4,8,4)(4,8,4)$ an einem 4-Eck zusammen, hier an einem 8-Eck – und führt somit zu einem Biprismachor mit $p = q = 8$.

Auch **(IX)** kann allein nicht benutzt werden, da wir am 3-Eck nicht weiterbauen können. Und eine Kombination mit **(X)** ist auch nicht möglich, da dann eine Kante mit $(3,4,4)(3,8,8)$ nötig wäre.

Also schauen wir uns als letztes **(X)** an: Am 3-Eck des $(3,4,4,4)$ steht ein $(3,4,4)$ auf seinem 3-Eck, und an einer Kante zwischen ihnen liegt ein zweites $(3,4,4)$ so, dass dessen 3-Ecke auf 4-Ecke des $(3,4,4,4)$ zeigen. Hier können wir aber nicht weiterkonstruieren, da $(4,4,3,4)(3,4,4)$ in der Gruppe nicht vorkommt.

7.2.37 Radius ≈ 1.89364

Diese Gruppe führt eindeutig auf ein 11-antiprismatisches Prismachor.

7.2.38 Radius ≈ 2.04168

Hier erhalten wir eindeutig ein 12-antiprismatisches Prismachor.

7.2.39 Radius ≈ 2.12132

In dieser Gruppe gibt es die Kantenumgebungen $(6,6,3)(4,6,6)(4,6,6)$ und $(3,6,6)(3,6,6)(6,6,4)$. Setzen wir einen $(4,6,6)$ nach innen und kleben an alle Kanten zwischen zwei 6-Ecken die zweite Kantenumgebung, d.h. an alle acht 6-Ecke ein $(3,6,6)$, so dass sich benachbarte $(3,6,6)$ an einem 3-Eck berühren, dann können wir noch sechs 4-Ecke vom inneren $(4,6,6)$ sehen, die jeweils von vier 6-Ecken umgeben sind. Dort hinein passen sechs $(4,6,6)$, die sich wieder über einige 6-Ecke berühren. Dann finden wir Lücken, in die wieder $(3,6,6)$ passen. Damit bleibt eine letzte Lücke übrig, die die Form eines $(4,6,6)$ hat [# 32]. Das so konstruierte Polychor ist uniform und somit eines der gesuchten.

7.2.40 Radius ≈ 2.14973

Die beiden Kantenumgebungen dieser Gruppe, $(3,3,3)(3,8,8)(3,8,8)$ und $(8,8,3)(8,8,3)(8,8,3)$, ergeben eindeutig den abgestumpften 8-Zeller [# 33]. Beim 8-Zeller bestehen die Zellen aus $(4,4,4)$, von denen drei pro Kante und vier pro Ecke liegen. Schneiden wir nun alle Ecken so tief ab, dass aus den $(4,4,4)(3,8,8)$ entstehen, dann liegen jetzt drei $(8,8,3)$ um eine Kante (die letztere Umgebung) und die Ecken bilden $(3,3,3)$, wobei an deren Kanten die erstere Kantenumgebung zu finden ist.

7.2.41 Radius ≈ 2.19128

Diese Gruppe führt zum 13-antiprismatischen Prismachor.

7.2.42 Radius ≈ 2.21306

Zu dieser Gruppe gehört eindeutig ein schräges dodekaedrisches Prismachor [# 34]: Angefangen mit einem $(3,3,3,3,5)$ innen legen wir an jedem 3-Eck ein $(3,4,4)$ und an jedem 5-Eck ein $(4,4,5)$. Zum Schluss legen wir außen herum noch einen zweiten $(3,3,3,3,5)$ und komplettieren damit das Polychor.

7.2.43 Radius ≈ 2.22736

Hier finden wir die Kantenumgebungen $(3,4,3,3)(3,3,6)(4,6,6)$, $(3,6,6)(3,6,6)(3,3,3,4)$ und $(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)(6,6,4)$. Fangen wir mit der ersten Umgebung an, d.h. kleben wir einen $(3,4,3,3)$ auf einen $(4,6,6)$ und einen $(3,6,6)$ auf ein benachbartes 6-Eck, so dass ein 3-Eck von $(3,6,6)$ auf $(3,4,3,3)$ zeigt. An einem benachbarten 6-Eck auf $(4,6,6)$ können wir nach der ersten Kantenumgebung ein weiteres $(3,6,6)$ anlegen und bekommen dann eine Kante am $(4,6,6)$ – zwischen zwei 6-Ecken – an der noch ein weiterer $(3,6,6)$ fehlt, um die zweite und dritte Kantenumgebung zu bilden. Bleiben wir weiter bei dieser Kante, dann können wir am dazu benachbarten 4-Eck des $(4,6,6)$ einen weiteren $(3,4,3,3)$ ankleben, der sich mit den drei $(3,6,6)$ zusammenfügt. Jetzt müssen wir an den beiden $(3,4,3,3)$ an den freien 4-Ecken je einen weiteren $(4,6,6)$ ankleben. Diese beiden $(4,6,6)$ berühren mit einem 6-Eck – nach der ersten Kantenumgebung – den dritten, zuletzt eingefügten $(3,6,6)$. Da sich beim $(3,6,6)$ alle 6-Eck-Paare an einer Kante berühren, müssen sich nun auch die beiden letzten $(4,6,6)$ an einer Kante berühren. Dies ist aber in dieser Gruppe nicht erlaubt.

7.2.44 Radius ≈ 2.23607

Zu diesem Radius gehören die beiden Kantenumgebungen $(4,6,4)(6,6,4)(4,6,6)$ und $(4,6,4)(4,4,6)(4,6,6)$. Setzen wir einen $(4,6,6)$ nach innen und kleben an einem 6-Eck einen zweiten $(4,6,6)$ so an, dass dessen 4-Ecke an den 6-Ecken des ersten $(4,6,6)$ stoßen. Dann liegen an den freien Kanten zwischen ihnen nach der ersten Umgebung nur $(4,4,6)$, die sich alternierend mit 4-Eck/6-Eck an die beiden $(4,6,6)$ legen. Damit bekommen wir drei Kanten mit $(4,6,4)(4,6,6)$ – die Zellen berühren sich an 4-Ecken – an denen nur je ein weiterer $(4,6,6)$ passt. Dann können alle freien Kanten zwischen zwei $(4,6,6)$ wieder mit $(4,4,6)$ aufgefüllt werden, danach wieder $(4,6,6)$ angelegt werden usw., bis das Polychor geschlossen ist [# 35].

7.2.45 Radius ≈ 2.28825

Zu dieser Gruppe haben wir acht Kantenumgebungen: **(I)** = $(4,4,3)(4,4,4)(4,4,10)$, **(II)** = $(4,4,3)(4,4,4)(4,10,4)(4,10,4)$, **(III)** = $(4,4,4)(4,5,4)(4,5,4,3)$, **(IV)** = $(4,4,3)(4,4,4)(4,4,4)(4,4,5)$, **(V)** = $(4,4,3)(4,4,4)(4,4,5)(4,4,4)$, **(VI)** = $(3,4,4)(4,4,4)(3,4,5,4)$, **(VII)** = $(4,4,4)(4,4,5)(4,4,10)$ und **(VIII)** = $(4,10,4)(4,10,4)(4,4,10)$. Fangen wir mit **(I)** an. Dann muss es eine Kantenumgebung mit $(3,4,4)(4,10,4)$ geben; solch eine finden wir aber in dieser Gruppe nicht. Fangen wir also mit **(II)** an. Dann muss es eine Kantenumge-

bung mit $(3,4,4)(4,4,10)$ geben; auch eine solche Umgebung finden wir nicht in dieser Gruppe.

Nun fangen wir mit **(III)** an und setzen ein $(3,4,5,4)$ nach innen. Dann müssen wir nach **(III)** auf alle 5-Ecken $(4,4,5)$ und auf alle 4-Ecken $(4,4,4)$ kleben. Es entstehen Lücken, die nur durch $(3,4,4)$ gefüllt werden können; wir benutzen **(V)** und **(VI)**. Um nun die Eckentransitivität zu gewährleisten, muss an alle äußeren Ecken ein $(3,4,5,4)$. Dies erreichen wir leicht, da die äußeren Flächen exakt die gleiche Form haben. Mit einem äußeren $(3,4,5,4)$ schließen wir also das Polychor [# 36].

Betrachten wir jetzt **(IV)**: Dort berühren sich ein $(4,4,5)$ und ein $(3,4,4)$ so, dass ein 3-Eck und ein 5-Eck an derselben Kante liegen. Hier können wir aber nicht weiterbauen, da es keine entsprechende Kantenumgebung in dieser Gruppe gibt. Ein ähnliches Argument greift auch, wenn wir mit **(VII)** anfangen: Hier suchen wir vergeblich eine Kantenumgebung mit einem 5- und 10-Eck an der gemeinsamen Kante.

Beginnen wir mit **(V)** und versuchen, diese mit **(VI)** bis **(VIII)** zu kombinieren, da eine Ecken Umgebung mit mit **(V)** allein nicht existiert, weil am 3- und am 5-Eck nicht weitergebaut werden kann. Allerdings kann auch mit **(VI)** bis **(VIII)** nicht am 5-Eck weitergebaut werden. Aus demselben Grund kann auch **(VI)** weder allein noch mit **(VII)** oder **(VIII)** vorkommen. Gleiches gilt für **(VII)**.

Als letztes schauen wir uns **(VIII)** an. Diese Kantenumgebung entspricht genau den Voraussetzungen von Lemma 2 mit $p = q = 10$ und liefert somit eindeutig ein Biprismachor, denn eine Kombination mit den anderen sieben Kantenumgebungen ist nicht möglich: Einige sind durch Widersprüche ausgeschlossen, andere führen ohne **(VIII)** eindeutig zu anderen Polychora.

7.2.46 Radius ≈ 2.34214

Aus dieser Gruppe können wir eindeutig ein 14-antiprismatisches Prismachor konstruieren.

7.2.47 Radius ≈ 2.37093

In dieser Gruppe finden wir die Kantenumgebungen **(I)** = $(4,4,4) (4,4,6) (4,4,3,4)$, **(II)** = $(4,4,4) (4,4,6) (4,4,8)$, **(III)** = $(4,6,4) (3,6,6) (3,4,4,4)$, **(IV)** = $(6,6,3) (4,6,4) (4,6,8)$, **(V)** = $(4,4,4) (4,6,4) (4,6,8)$, **(VI)** = $(6,6,3) (4,6,4) (4,4,4) (4,6,4)$, **(VII)** = $(4,4,4) (4,8,4) (4,8,6)$ und **(VIII)** = $(4,6,4) (4,8,4) (6,8,4)$.

Fangen wir mit **(I)** an und benennen die zwölf 4-Ecke des $(3,4,4,4)$ zwischen 3-Ecken als Kanten-4-Ecke, die anderen sechs als Flächen-4-Ecke, analog zur Bezeichnung der Flächen beim Beschneiden des $(4,4,4)$ zum $(3,4,4,4)$. Für **(I)** gibt es zwei Möglichkeiten: Erstens kann der $(4,4,4)$ an einem Kanten-4-Eck des $(3,4,4,4)$ liegen. Damit klebt dann das angrenzende $(4,4,6)$ an einem Flächen-4-Eck. Dann benötigen wir aber eine Kantenumgebung mit $(3,4,4,4)(4,4,4)$, welche in dieser Gruppe nicht existiert. Zweitens kann der $(4,4,4)$ auf einem Flächen-4-Eck und der $(4,4,6)$ auf einem Kanten-4-Eck liegen. Dann können wir am $(4,4,6)$ die Kantenumgebung **(III)** anbauen, womit an dem 3-Eck des $(3,4,4,4)$ dann ein $(3,6,6)$ anliegt. Jetzt führen wir **(I)** und **(III)** weiter durch, immer ein $(3,6,6)$ auf die 3-Ecke des $(3,4,4,4)$, $(4,4,4)$ auf die Flächen-4-Ecke und $(4,4,6)$ auf die Kanten-4-Ecke, bis alle Flächen des inneren $(3,4,4,4)$ belegt sind. Damit haben wir an den Kanten des $(3,6,6)$ zwischen zwei 6-Ecken **(VI)** angewendet. Nun können wir an den noch freien 4-Ecken der sechs $(4,4,4)$ jeweils ein weiteres $(3,4,4,4)$ – wieder mit einem Flächen-4-Eck – ankleben und die Lücken mit **(I)**, **(III)** und **(VI)** auffüllen, bis die letzte Lücke mit einem letzten $(3,4,4,4)$ geschlossen ist [# 37].

Nun betrachten wir **(II)** und dabei genauer eine Kante zwischen $(4,4,4)$ und $(4,6,4)$. Hier kann mit **(V)** nur ein $(4,6,8)$ angelegt werden. Dieser passt dann auch mit dem $(4,8,4)$ und bildet die Kantenumgebungen **(VII)** und **(VIII)**. Nehmen wir nun diesen $(4,6,8)$ innen und kleben an allen Flächen die entsprechenden Prismen (mit **(II)**, **(V)**, **(VII)** und **(VIII)**), dann bekommen wir eine Lücke, in die ein zweiter $(4,6,8)$ passt [# 38].

Versuchen wir **(III)** allein oder mit **(IV)** bis **(VIII)** zu kombinieren, dann können wir an einer Kante mit $(4,4,3,4)$ nicht weiterkonstruieren. Ähnliches gilt für **(IV)**: Dort bleiben wir an $(3,6,6)$ stehen.

Für **(V)**, **(VI)** und **(VIII)** bekommen wir das Problem, dass wir an $(4,4,6)$ nicht weiterbauen können, und **(VII)** weist eine Kante mit $(4,4,8)$ auf, an der ebenfalls eine Fortsetzung nicht möglich ist.

7.2.48 Radius ≈ 2.49721

Zu diesem Radius gehören die vier Kantenumgebungen **(I)** = $(3,4,4)$ $(3,4,3,4)$ $(3,3,3,3,3)$, **(II)** = $(3,4,4)$ $(3,4,3,4)$ $(3,3,3,5)$, **(III)** = $(3,4,4)$ $(3,5,3,3)$ $(4,5,4,3)$ und **(IV)** = $(4,4,3)$ $(3,4,3,4)$ $(3,4,5,4)$. Fangen wir mit **(I)** an, indem wir einen $(3,4,3,4)$ innen setzen und einem seiner 3-Ecke ein $(3,3,3,3,3)$ ankleben. Nun legen wir – nach **(I)** – an zwei angrenzenden 4-Ecken auf dem $(3,4,3,4)$ je einen $(3,4,4)$. Dann muss an den beiden Kanten zwischen $(4,4,3)$ und $(3,4,3,4)$ nach **(IV)** ein $(3,4,5,4)$ anliegen. Dieser würde dann aber auch an dem $(3,3,3,3,3)$ anstoßen, was in dieser Gruppe nicht erlaubt ist. Also

fangen wir mit **(II)** und dort auch wieder mit einem $(3,4,3,4)$ innen an. An ein 3-Eck kleben wir jetzt ein $(3,3,3,5)$ an und können mit **(II)** an zwei Kanten zwischen $(3,4,3,4)$ und $(3,3,3,5)$ wieder $(3,4,4)$ anlegen. Nun passt mit **(III)** und **(IV)** ein $(3,4,5,4)$. Aber auf der anderen Seite des $(3,3,3,5)$ haben wir eine Kantenumgebung mit $(3,5,3,3)$ $(3,4,3,4)$, welche wieder nicht in dieser Gruppe ist. Und **(III)** und **(IV)** führen auch wieder auf diesen Widerspruch.

7.2.49 Radius ≈ 2.52796

Nach kurzem Betrachten der Kantenumgebungen dieser Gruppe wird sofort klar, dass hier eindeutig ein stumpfes ikosaedrisches Prismachor herauskommt [# 39].

7.2.50 Radius ≈ 2.61313

In dieser Gruppe haben wir die fünf Kantenumgebungen **(I)** = $(4,4,3)(3,4,4,4)$ $(3,4,4,4)$, **(II)** = $(3,4,4)$ $(3,4,3,4)$ $(4,4,3,4)$, **(III)** = $(3,4,4)$ $(3,4,3,4)$ $(4,4,8)$, **(IV)** = $(4,8,4)$ $(3,8,8)$ $(3,4,3,4)$ und **(V)** = $(4,4,3)$ $(4,8,4)$ $(8,8,3)$ $(4,8,4)$. Fangen wir wieder mit **(I)** an und setzen ein $(3,4,4,4)$ nach innen. Dann können wir an allen 3-Ecken der inneren Zelle weitere $(3,4,4,4)$ ankleben. Zwischen ihnen passen nun $(3,4,4)$ – mit **(I)** – und zwischen jeweils vier $(3,4,4)$ – mit **(II)** – sechs $(3,4,3,4)$. Nun können an den noch freien 4-Ecken der acht äußeren $(3,4,4,4)$ wieder $(3,4,4)$ und an den dann entstandenen Lücken $(3,4,3,4)$ gelegt werden usw. Zum Schluss schließt ein letzter $(3,4,4,4)$ das Polychor [# 40]. Mit **(II)** allein oder mit den anderen Kantenumgebungen außer **(I)** können wir kein Polychor bauen, da wir an der Kante $(3,4,4,4)$ stecken bleiben. Betrachten wir nun **(III)**, **(IV)** und **(V)**: Die größte dieser Zellen ist der $(3,8,8)$, den wir innen hinlegen und nach **(V)** an all seinen 8-Ecken $(4,4,8)$ ankleben. An den noch freien 3-Ecken kleben wir $(3,4,3,4)$ womit wir die Kantenumgebung **(IV)** benutzt haben. Jetzt können wir benachbarte $(3,4,3,4)$ mit $(3,4,4)$ verbinden, von denen zwei 4-Ecke auf 4-Ecken der $(4,4,8)$ liegen. Damit benutzen wir nun auch **(III)**. Jetzt kleben wir an den sechs freien 8-Ecken wieder $(3,8,8)$ und zwischen ihnen an den freien 4-Ecken der $(3,4,4)$ zwölf $(4,4,8)$ und benutzen damit auch **(V)**. Durch weiteres Ankleben von $(3,4,3,4)$, $(3,4,4)$, $(4,4,8)$ und eines weiteren $(3,8,8)$ komplettieren wir das Polychor [# 41].

7.2.51 Radius ≈ 2.64575

Diese Gruppe entsteht vom 24-Zeller durch Abschneiden der Ecken [# 42]. Der 24-Zeller besteht aus $(3,3,3,3)$, von denen drei an jeder Kante und sechs an jeder Ecke zusammenkommen. Schneiden wir nun die Ecken so tief ab, dass aus dem $(3,3,3,3)$ ein $(4,6,6)$ besteht, dann liegen notwendigerweise drei $(6,6,4)$ um eine Kante. Die abgeschnittenen Ecken bilden nun $(4,4,4)$, welche mit zwei $(4,6,6)$ die zweite Kantenumgebung dieser Gruppe darstellen.

7.2.52 Radius ≈ 3.00592

Zu diesem Radius gehören die Kantenumgebungen $(4,4,3)$ $(4,8,6)$ $(4,8,6)$, $(6,6,3)$ $(6,8,4)$ $(6,8,4)$ und $(3,4,4)$ $(3,6,6)$ $(4,6,8)$. Wenn wir mit einem $(4,6,8)$ innen anfangen, dann können wir an seinen 8-Ecken nur sechs weitere $(4,6,8)$ kleben, und zwar so, dass 4-Ecke an 4-Ecken und 6-Ecke an 6-Ecken liegen. An diese 4-Ecke passen dann nur $(3,4,4)$ und an die 6-Ecke $(3,6,6)$, welche dann wiederum über die 3-Ecke verbunden sind. Durch das Anlegen weiterer $(3,6,6)$ und $(3,4,4)$ sowie eines weiteren $(4,6,8)$ außen schließen wir das Polychor [# 43].

7.2.53 Radius ≈ 3.01125

Dieser Gruppe können wir das stumpfe dodekaedrische Prismachor zuordnen [# 44]: Ein $(3,10,10)$ liegt innen, an die 3-Ecke kleben wir $(3,4,4)$, an die 10-Ecke $(4,4,10)$ und außen herum ein weiteres $(3,10,10)$.

7.2.54 Radius ≈ 3.07768

Hier bilden die Kantenumgebungen **(I)** = $(3,3,3,3)$ $(3,3,3,3)$ $(3,3,3,3,3)$, **(II)** = $(3,3,3,3)$ $(3,3,3,3)$ $(3,3,3,5)$, **(III)** = $(3,5,3,3)$ $(3,3,3,3)$ $(3,5,3,5)$, **(IV)** = $(4,5,4)$ $(4,4,5)$ $(4,5,4,3)$ und **(V)** = $(4,5,4)$ $(3,5,3,3)$ $(3,4,5,4)$ eine Gruppe. Betrachten wir zuerst **(I)** und setzen den $(3,3,3,3,3)$ nach innen. Dann kleben wir an alle seine 3-Ecke $(3,3,3,3)$. Es entstehen für jede Ecke des $(3,3,3,3,3)$ Lücken, die aus jeweils fünf 3-Ecken um eine Ecke bestehen. Hier passen – wieder mit **(I)** – weitere $(3,3,3,3,3)$, die sich teilweise wieder über Ecken berühren. Mit abwechselndem Ankleben von $(3,3,3,3)$ und $(3,3,3,3,3)$ schließen wir das Polychor widerspruchsfrei [# 45]. Wir können allerdings in jedem Schritt anstatt eines $(3,3,3,3,3)$ auch ein $(3,3,3,5)$ nehmen. Diese Fälle betrachten wir nicht im Einzelnen, sondern zeigen, dass **(II)** allgemein nicht vorkommen kann: Setzen wir einen $(3,3,3,5)$ nach innen und kleben an allen 3-Ecken nach **(II)** $(3,3,3,3)$. Unter dem $(3,3,3,5)$ an einem 5-Eck können wir

nun nach **(III)** ein $(3,5,3,5)$ oder nach **(V)** ein $(4,5,4)$ ankleben. Im ersten Fall können wir dann auf allen 5-Ecken des $(3,5,3,5)$ weitere $(3,3,3,5)$ anlegen und die Lücken zwischen ihnen mit $(3,3,3,3)$ auffüllen. Damit gibt es mindestens einen besonderen $(3,3,3,3)$, der drei $(3,3,3,5)$ berührt. An all diesen drei $(3,3,3,5)$ müssen jetzt – wieder nach **(III)**, da **(V)** mangels $(3,3,3,3)$ nicht möglich ist – weitere $(3,5,3,5)$ liegen, die über einen weiteren $(3,3,3,5)$ mit dem besonderen $(3,3,3,3)$ verbunden sind. Nun muss der zwischengelegte $(3,3,3,5)$, damit er eines der drei neuen $(3,5,3,5)$ berührt, den anderen beiden ein 3-Eck zudrehen, kann das aber nicht, weil er nicht wie der $(3,3,3,3)$ über 3er-Symmetrie verfügt. Im zweiten Fall kleben wir an einem 5-Eck eines $(3,3,3,5)$, an dessen 3-Ecke schon überall $(3,3,3,3)$ hängen, ein $(4,5,4)$ an. Dann bekommen wir aber eine Kante mit $(3,3,3,3)(3,5,3,3)(4,5,4)$, welche nicht existiert. Somit können **(II)** und **(III)** nicht vorkommen. Bleiben noch **(IV)** und **(V)** übrig: Mit **(IV)** bekommen wir schnell einen Widerspruch, denn kleben wir an ein $(3,4,5,4)$ am 5-Eck ein $(4,4,5)$ und an zwei benachbarten Kanten davon nach **(IV)** $(4,5,4)$, dann haben wir eine Kante mit $(4,5,4)(4,4,5)(4,5,4)$, welche nicht existiert. Und kleben wir nach **(V)** ein $(3,3,3,5)$ an ein $(3,4,5,4)$ und dazwischen ein $(4,4,5)$, dann gibt es eine Kante mit $(3,4,5,4)(3,3,3,5)$, welche ebenfalls in dieser Gruppe nicht existiert.

7.2.55 Radius ≈ 3.41421

Diese Gruppe besteht aus zwei disjunkten Kantenumgebungen. Die erste ist $(3,4,3,3)(3,4,3,4)(3,3,3,4)$. Nehmen wir die größte Zelle, den $(3,4,3,4)$, und wählen darauf ein 3-Eck aus. An diesem liegen drei 4-Ecke, an denen nach der Kantenumgebung nur $(3,4,3,3)$ liegen können. Dann muss auf dem ausgewählten 3-Eck auch ein $(3,4,3,3)$ liegen, der mit den ersten drei $(3,4,3,3)$ die gegebene Umgebung liefert. Dies ist aber nicht möglich, da $(3,4,3,3)$ nicht über die 3er-Symmetrie des $(3,4,3,4)$ verfügt.

Die zweite Kantenumgebung dieser Gruppe ist $(8,8,3)(3,8,8)(3,8,8)$. Fangen wir mit einem $(3,8,8)$ innen an und kleben an allen acht 3-Ecken weitere $(3,8,8)$. Dann passen in die Lücken, also auf die 8-Ecke der inneren Zelle, weitere $(3,8,8)$; es wird nur die angegebene Kantenumgebung benutzt. Dann liegen an den jetzt noch freien 3-Ecken der ersten acht $(3,8,8)$ schon je ein weiterer $(3,8,8)$ mit einem 8-Eck am freien 3-Eck; darauf passen auf eindeutige Weise weitere $(3,8,8)$. Diese Konstruktion führt somit eindeutig zu einem uniformen Polychor [# 46].

7.2.56 Radius ≈ 3.49895

Zu dieser Gruppe gehören die acht Kantenumgebungen **(I)** = (3,4,4)(4,4,6)(3,4,4,4), **(II)** = (4,8,4)(4,4,6)(4,8,6), **(III)** = (4,4,3)(4,6,4)(4,6,8), **(IV)** = (4,4,3)(4,6,4)(6,6,4)(4,6,4), **(V)** = (4,6,4)(6,6,4)(4,6,8), **(VI)** = (4,6,4)(4,6,6)(4,4,3,4), **(VII)** = (4,6,4)(4,6,6)(4,4,8) und **(VIII)** = (4,8,4)(4,6,6)(6,8,4). Fangen wir mit **(I)** an und legen (3,4,4,4) ins Innere. Dann können wir an allen 3-Ecken (3,4,4) und an allen 4-Ecken, die zwei 3-Ecke an Kanten berühren, je ein (4,4,6) so ankleben, dass deren 4-Ecke mit denen der (3,4,4) zusammenfallen. Auf die restlichen 4-Ecke des (3,4,4,4) passen nun – mit **(IV)** und **(VI)** – (4,6,6). Dann erhalten wir Lücken, die aus 3-Ecken umgeben von je sechs 4-Ecken (drei an den Kanten, drei weitere an den Ecken) bestehen; hier passen – wieder mit **(I)**, **(IV)** und **(VI)** – weitere (3,4,4,4), denen dann wieder (3,4,4), (4,4,6) und (4,6,6) folgen. Diese Konstruktion führt zu einem der gesuchten uniformen Polychora [# 47]. Fangen wir hingegen mit **(II)** an und setzen (4,6,8) fest ins Innere, dann können wir an allen 8-Ecken (4,4,8) und an allen 4-Ecken (4,4,6) so ankleben, dass deren 4-Ecken auf die 4-Ecken der (4,4,8) zeigen. Nun passen auf die noch freien 6-Ecken des (4,6,8) nach **(V)**, **(VII)** und **(VIII)** genau (4,6,6). An die jetzt freien 8-Ecken der (4,4,8) kommen weitere (4,6,8), so dass deren 6-Ecke mit den (4,6,6) zusammenfallen. Dann kommen weitere (4,4,6), (4,6,6), (4,4,8) und (4,6,8), bis sich das Polychor schließt [# 48]. Die Kantenumgebung **(III)** kann nicht vorkommen, da diese am (3,4,4) dann eine Kantenumgebung mit (3,4,4)(4,8,6) benötigen würde, es diese aber in der Gruppe nicht gibt. Betrachten wir **(IV)** kombiniert mit sich selbst oder mit **(V)** bis **(VIII)**, dann können wir am 3-Eck nicht weiterbauen. **(V)**, **(VI)** und **(VII)** führen zu einer Kante mit (4,4,6), die allerdings – mit **(I)** und **(II)** – schon betrachtet wurden. Und **(VIII)** allein kann nicht vorkommen, da wir eine Konstruktion bei (4,4,8) nicht fortführen können.

7.2.57 Radius ≈ 3.68137

In dieser Gruppe kommt nur die Kantenumgebung (5,5,5)(5,5,5)(5,5,5) vor und wir wissen, dass diese allein eindeutig zum regelmäßigen 120-Zeller führt [# 49].

7.2.58 Radius ≈ 3.83513

Für diesen Radius gibt es die vier Kantenumgebungen **(I)** = (4,4,4)(4,4,6)(4,4,10), **(II)** = (4,4,4)(4,6,4)(4,6,10), **(III)** = (4,4,4)(4,10,4)(4,10,6) und **(IV)** = (4,6,4)(4,10,4)(6,10,4). Angefangen mit **(I)** kann an die 10-Ecke

von $(4,4,10)$ nur je ein $(4,6,10)$ so angelegt werden, dass an den Kanten der 10-Ecke die Kantenumgebungen **(III)** und **(IV)** vorkommen. Da aber im $(4,6,10)$ auch 4- und 6-Ecke zusammenstoßen, stimmt auch die Kantenumgebung **(II)**. Entlang der Oberfläche eines $(4,6,10)$ wird also eine Schicht 4-, 6- und 10-Prismen geklebt, die mit der Oberfläche des zweiten $(4,6,10)$ zusammenfallen. Somit ist diese Konstruktion widerspruchsfrei [# 50].

7.2.59 Radius ≈ 4.29945

In dieser Gruppe gibt es drei Kantenumgebungen: **(I)** = $(4,4,3)(4,6,8)(4,6,8)$, **(II)** = $(3,4,4)(3,8,8)(4,8,6)$ und **(III)** = $(8,8,3)(6,8,4)(6,8,4)$. Angefangen mit **(I)** erhalten wir zwei Kanten mit $(3,4,4)$ und $(4,8,6)$, an die nach **(II)** nur je ein $(3,8,8)$ passt und die die neuen Kantenumgebungen $(8,8,3)(6,8,4)(6,8,4)$ – **(III)** – bilden. Jetzt können an den entstehenden Kanten $(4,6,8)(4,6,8)$ – verbunden durch das 6-Eck – wieder $(3,4,4)$ gesetzt werden, an die wieder ein weiterer $(4,6,8)$ und ein $(3,8,8)$ passen usw. Diese Konstruktion ist widerspruchsfrei und führt zu einem der gesuchten uniformen Polychora [# 51].

7.2.60 Radius ≈ 4.53457

Diese Gruppe besteht nur aus der Kantenumgebung $(3,3,3)(3,5,3,5)(3,5,3,5)$. Fangen wir mit einem $(3,5,3,5)$ an und legen an alle 3-Ecke ein $(3,3,3)$. Dann passen an den freistehenden 5-Ecken wieder $(3,5,3,5)$, die auch mit den $(3,3,3)$ wieder zur gleichen Kantenumgebung führen. Jetzt können wieder an die freien 3-Ecke $(3,3,3)$ gelegt werden usw. Wie man schnell sieht, führt diese Konstruktion widerspruchsfrei zu einem uniformen Polychor [# 52].

7.2.61 Radius ≈ 4.64352

Diese Gruppe hat sieben Kantenumgebungen: **(I)** = $(6,6,3)(6,6,3)(6,6,5)$, **(II)** = $(3,6,6)(3,6,6)(3,3,3,3,3)$, **(III)** = $(3,6,6)(3,6,6)(3,3,3,5)$, **(IV)** = $(3,5,3,3)(3,6,6)(5,6,6)$, **(V)** = $(6,6,3)(6,6,5)(6,6,5)$, **(VI)** = $(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)(6,6,5)$ und **(VII)** = $(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)$.

Angefangen mit **(I)** kann zwischen $(5,6,6)$ und $(3,6,6)$ – nach **(IV)** – nur ein $(3,5,3,3)$ liegen. Da aber an **(I)** drei Zellen liegen, $(3,5,3,3)$ aber vier Flächen pro Ecke hat, kann hier nicht weiterkonstruiert werden.

Fangen wir mit **(II)** an und kleben an alle 3-Ecke des $(3,3,3,3,3)$ je ein $(3,6,6)$, dann entstehen Kantenumgebungen $(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)$, die mit **(VII)** erlaubt sind. An den freien 3-Ecken der $(3,6,6)$ passen nun wieder $(3,3,3,3,3)$ – mit der Kantenumgebung **(II)** – und an diesen wieder

(3,6,6) usw. Diese Konstruktion führt widerspruchsfrei zu einem Polychor [# 53].

Beginnen wir mit **(III)**, dann können wir an allen 3-Ecken des (3,3,3,5) je ein (3,6,6) anlegen. Die dabei neuentstehenden Kantenumgebungen haben drei aufeinander folgende (6,6,3); es kommen also nur **(VI)** und **(VII)** in Frage. Da aber nach **(IV)** am 5-Eck des (3,3,3,5) nur ein (5,6,6) liegen kann, kommt nur **(VI)** – und nicht **(VII)** – mit (6,6,3)(6,6,3)(6,6,3)(6,6,5) vor. Stellen wir uns den (5,6,6) nun unten liegend vor mit einem 6-Eck oben, kleben an den oberen drei 5-Ecken (3,3,3,5), an den oberen vier 6-Ecken (3,6,6) und zusätzlich an den drei oberen Kanten zwischen den 6-Ecken je einen weiteren (3,6,6) an, so bekommen wir wegen der 3er-Symmetrie des (3,6,6) ganz oben ein 3-Eck, an dem an jeder Kante wieder ein 3-Eck – vom benachbarten (3,6,6) – liegt. Laut Konstruktion müsste am mittleren 3-Eck ein (3,3,3,5) liegen. Dann gibt es aber eine Kante mit (3,6,6)(3,6,6)(3,5,3,3), die weder als 3- noch als 4- oder 5-Zellen-Kantenumgebung in dieser Gruppe existiert. Damit kann aber auch mit **(IV)** oder **(VI)** keine widerspruchsfreie Konstruktion entstehen.

Und fangen wir mit **(V)** an, dann erhalten wir gleich im ersten Schritt eine Kante mit den Zellen (5,6,6) und (5,6,6) – die mit den 5-Ecken aneinander liegen. Auch solch eine Kantenumgebung existiert in dieser Gruppe nicht.

Zu guter Letzt kann **(VII)** allein ebenfalls nicht vorkommen, da wir an den 3-Ecken der (3,6,6) nicht weiterbauen können.

7.2.62 Radius ≈ 5.16991

Zu dieser Gruppe gehören die beiden Kantenumgebungen **(I)** = (4,6,4)(4,4,6)(4,6,8) und **(II)** = (4,6,4)(6,8,4)(4,8,6). Beginnen wir mit einem (4,6,8) und kleben an jedes 6-Eck ein (6,4,4), so können wir nach **(I)** an den 4-Ecken des (4,6,8) nur noch je ein (4,4,6) anlegen, so dass deren 6-Ecke an den 8-Ecken des (4,6,8) anstoßen. Zusammen mit den 4-Ecken der (6,4,4), die auf den 6-Ecken des (4,6,8) liegen, bekommen wir Lücken, in denen je ein weiterer (4,6,8) derart passt, dass er zum ersten (4,6,8) verdreht ist, seine 4-Ecke also mit den 6-Ecken des ersten an Kanten zusammenstoßen und umgekehrt. Es entstehen die Kantenumgebungen (4,6,4)(6,8,4)(4,8,6), die mit **(II)** erlaubt sind, und (4,6,4)(4,4,6)(4,6,8), die wiederum als **(I)** in der Gruppe zu finden sind. An den angefügten (4,6,8) können nun wieder (4,4,6) – jeweils mit 4- oder 6-Eck – angebracht werden, an den Lücken gedrehte (4,6,8) usw. Diese Konstruktion führt also zu einem uniformen Polychor [# 54].

7.2.63 Radius ≈ 5.23607

Diese Gruppe besteht aus sechs Kantenumgebungen, die nun durchnummeriert werden: **(I)** = (4,4,3) (4,5,4) (4,5,4,3), **(II)** = (4,5,4) (5,5,5) (4,5,4,3), **(III)** = (4,4,3) (4,5,4) (5,5,5) (4,5,4), **(IV)** = (3,3,3) (3,4,4) (3,4,5,4), **(V)** = (3,4,4) (4,4,5) (3,4,5,4) und **(VI)** = (3,3,3) (3,4,4) (4,4,5) (3,4,4).

Fangen wir mit **(I)** an, dann ist zwischen (3,4,4) und (3,4,5,4) – verbunden über ein 4-Eck, die hier deshalb unterstrichen sind – nur **(IV)** mit (3,3,3) möglich. Danach passt zwischen (3,3,3) und (3,4,5,4) nur **(IV)** mit (3,4,4), damit die Lücke zum (4,5,4) von der Anfangskantenumgebung geschlossen wird. Dadurch ergibt sich die neue Kantenumgebung (4,4,5)(3,4,4)(3,3,3) (3,4,4), die mit **(VI)** erlaubt ist. Nun existiert eine Kante an den Zellen (4,4,3) und (4,5,4), an der wiederum entweder ein (4,5,4,3) – nach **(I)** – oder nach **(III)** die Zellen (4,5,4) und (5,5,5) passen. Im ersten Fall gibt es dann aber wegen der 3er-Symmetrie des (3,4,4) eine Kante mit zwei (4,5,4,3); diese gibt es in dieser Gruppe nicht. Im zweiten Fall ist die Eckenttransitivität gebrochen, da an der ersten Ecke – die obere Ecke der Kante der ersten Umgebung – kein (5,5,5) anlag, diese Zelle jetzt aber benutzt wird und somit an mindestens einer anderen Ecke sitzt.

Beginnen wir mit **(II)**, dann kann nach **(V)** zwischen (4,4,5) und (4,3,4,5) nur ein (3,4,4) liegen. Zwischen diesem und dem (3,4,5,4) der ersten Kantenumgebung geht dann – auch wieder nach **(V)** – nur ein (4,4,5). Mit **(III)** existiert dann auch die erhaltene Kantenumgebung (4,4,3)(4,5,4)(5,5,5) (4,5,4). Weiter passt zwischen (5,5,5) und (4,5,4) – nach **(II)** – und zwischen (3,4,4) und (4,4,5) – nach **(V)** – nur wieder je ein (3,4,5,4). Nun ergibt sich am 3-Eck vom ersten (3,4,5,4), das am ersten (4,4,5) liegt, ein Problem: Dort muss analog ein (3,4,4) liegen, daneben ein weiteres (4,4,5) und somit ein weiteres (3,4,5,4). Jetzt gibt es aber eine Kantenumgebung mit zwei (3,4,5,4) und einem (5,5,5), die in dieser Gruppe nicht vorkommt.

Fangen wir also mit **(III)** an, dann passt zwischen (5,5,5) und (4,5,4) entweder nach **(I)** ein (4,5,4,3), was aber, wie schon gesehen, zu einem Widerspruch führt, oder nach **(III)** zwei weitere Zellen (4,5,4) und (4,4,3). Der zweiten Möglichkeit folgend erhalten wir nun nach **(VI)** (3,4,4)(3,3,3)(3,4,4) (4,4,5). Jetzt kann an den Kanten, die nicht zum ersten (5,5,5) gehören und zwischen (4,5,4) und (4,4,3) liegen, entweder nach **(I)** ein (3,4,5,4) liegen, was ja aber zum Widerspruch führt, oder nach **(III)** die Zellen (4,5,4) und (5,5,5). Die letztere Möglichkeit führt zu einer Konstruktion ohne Widerspruch, da nun an den (3,3,3) wieder (3,4,4) anliegen können und die neuen Kantenumgebungen nach **(III)** und **(VI)** existieren [# 55].

Die Kantenumgebung **(IV)** kann weder allein noch mit **(V)** oder **(VI)** vorkommen, da wir in diesen drei Umgebungen keine Kante mit $(4,4,3)$ finden.

Nun müssen wir noch die Kantenumgebung **(V)** betrachten: Fangen wir mit einem $(3,4,5,4)$ an und legen an alle Flächen um ein 5-Eck herum abwechselnd $(3,4,4)$ und $(4,4,5)$ an, so dass erstere auf den 3-Ecken, letztere auf den 4-Ecken des $(3,4,5,4)$ liegen und alle Kantenumgebungen zwischen je drei Zellen wie in **(V)** sind. Jetzt passt nach **(II)** auf das freie 5-Eck nur ein $(5,5,5)$ und es entstehen fünf Umgebungen $(5,5,5)(5,4,4)(4,4,3)(5,4,4)$, die nach **(III)** erlaubt sind. Jetzt muss nach der Eckentransitivität an jedes $(3,4,4)$, das am $(5,5,5)$ anliegt, ein $(3,4,5,4)$ – mit **(V)** und **(II)** – anliegen. Somit haben wir Kanten am $(5,5,5)$, an denen zwei $(3,4,5,4)$ anliegen; solche Kantenumgebung gibt es aber in dieser Gruppe nicht.

Und **(VI)** ist allein ebenfalls nicht möglich, da es keine Konstruktionsvorschrift für die 5-Ecke gibt.

7.2.64 Radius ≈ 6.07359

Dieser Gruppe gehören die Kantenumgebungen $(4,5,4)(3,4,3,4)(3,5,3,5)$ und $(4,4,5)(3,4,3,4)(3,4,3,4)$ an. Setzen wir ein $(3,5,3,5)$ nach innen und kleben an alle 5-Ecke ein $(4,4,5)$ und an alle 3-Ecke ein $(3,4,3,4)$. Dann stoßen die $(4,4,5)$ über 4-Ecke an die $(3,4,3,4)$ und bilden mit dem $(3,5,3,5)$ die erste Kantenumgebung. Außerdem berühren sich auch benachbarte $(3,4,3,4)$ an 3-Ecken und bilden mit den $(4,4,5)$ die zweite Kantenumgebung. Jetzt können wir an allen $(4,4,5)$ eine weitere Schicht $(3,5,3,5)$ anbringen, wobei zwischen benachbarten $(3,5,3,5)$ genau ein $(4,4,5)$ passt. Dann entstehen Lücken, in die wieder $(3,4,3,4)$ passen usw. Diese Konstruktion führt eindeutig und widerspruchsfrei zu einem uniformen Polychor [# 56].

7.2.65 Radius ≈ 6.73503

Für diesen Radius gibt es die Kantenumgebungen $(4,4,3)(4,5,4,3)(4,5,4,3)$ und $(3,4,4)(3,3,3,3)(3,4,5,4)$. Fangen wir wieder mit der größten Zelle, dem $(3,4,5,4)$, innen an und kleben an alle 5-Ecke weitere $(3,4,5,4)$. Zwischen den 4-Ecken passen – nach der ersten Umgebung – nun $(3,4,4)$. Damit berühren sich benachbarte $(3,4,5,4)$ der ersten Schicht dann auch an 5-Ecken. Somit liegen immer vier $(3,4,5,4)$ mit ihren 3-Ecken um Lücken herum, an denen auch jeweils vier $(3,4,4)$ ihre 3-Ecke haben. Hier passen also nur $(3,3,3,3)$, was mit der zweiten Kantenumgebung auch erlaubt ist. Jetzt können wir außen zwischen den $(3,4,5,4)$ der ersten Schicht wieder $(3,4,4)$ und $(3,3,3,3)$ anfügen,

danach eine weitere Schicht $(3,4,5,4)$, dann wieder $(3,4,4)$ und $(3,3,3,3)$ usw., bis sich das Polychor schließt [# 57].

7.2.66 Radius ≈ 7.57963

In dieser Gruppe finden wir die Umgebungen $(3,6,6)(3,6,6)(6,6,5)$ und $(6,6,3)(5,6,6)(5,6,6)$. Kleben wir an ein $(5,6,6)$ an all seinen 5-Ecken weitere $(5,6,6)$, dann passen in die Lücken dazwischen genau $(3,6,6)$ so hinein, dass sich benachbarte $(3,6,6)$ an 3-Ecken berühren und immer fünf $(3,6,6)$ zyklisch um ein 5-Eck liegen. Hierbei haben wir nur die beiden möglichen Kantenumgebungen benutzt. Führen wir diese Konstruktion jetzt weiter, dann kommen wir zu einem der gesuchten uniformen Polychora [# 58].

7.2.67 Radius ≈ 8.21833

Dieser Radius gehört zum stumpfen 120-Zeller [# 59]. Der 120-Zeller besteht aus $(5,5,5)$, von denen drei um eine Kante und vier um eine Ecke liegen. Schneiden wir vom 120-Zeller alle Ecken so weit ab, dass aus den $(5,5,5)$ $(3,10,10)$ werden, dann liegen natürlich immer noch drei $(3,10,10)$ um eine Kante. Die abgeschnittenen Ecken bilden $(3,3,3)$, die zusammen mit zwei $(3,10,10)$ die zweite Kantenumgebung bilden.

7.2.68 Radius ≈ 8.27895

Diese Gruppe besteht aus den Kantenumgebungen $(4,5,4)(4,4,6)(4,5,4,3)$, $(4,6,4)(3,6,6)(3,4,5,4)$ und $(6,6,3)(4,6,4)(4,4,5)(4,6,4)$. Fangen wir mit der ersten Kantenumgebung an und betrachten die neue Kante zwischen $(4,6,4)$ und $(4,3,4,5)$, dann können wir dort nur mit einem $(3,6,6)$ eine mögliche, nämlich die zweite Kantenumgebung erhalten. An der entstandenen Kante zwischen $(3,4,5,4)$ und $(3,6,6)$ passt dann nur ein $(4,6,4)$ (erste Kantenumgebung), damit die Lücke zum $(4,5,4)$ von der Anfangsumgebung gefüllt wird. Nun ist die Kantenumgebung $(6,6,3)(4,6,4)(4,4,5)(4,6,4)$ entstanden, die mit der dritten erlaubten Umgebung dieser Gruppe übereinstimmt. Diese Konstruktion lässt sich in alle Richtungen widerspruchsfrei weiterführen und ergibt deshalb ein gesuchtes uniformes Polychor [# 60].

7.2.69 Radius ≈ 9.12410

Zu diesem Radius gehören die drei Kantenumgebungen $(4,5,4)(4,6,6)(5,6,6)$, $(6,6,4)(6,6,4)(6,6,5)$ und $(4,4,5)(4,6,6)(4,6,6)$. Setzen wir einen $(5,6,6)$ ins Innere und kleben an alle 5-Ecke $(4,5,4)$ und an alle 6-Ecke $(4,6,6)$. Dann

berühren sich benachbarte $(4,6,6)$ an 6-Ecken. Hierbei haben wir alle drei Kantenumgebungen benutzt. Nun sehen wir an allen $(4,4,5)$ außen Lücken, die ein 5-Eck in der Mitte und fünf 6-Ecke darum herum haben. Hier passen weitere $(5,6,6)$ hinein. Zwischen diesen passen dann weitere $(4,4,5)$ und $(4,6,6)$ usw. Auch diese Konstruktion führt eindeutig zu einem uniformen Polychor [# 61].

7.2.70 Radius ≈ 9.74461

Hier finden wir die drei Kantenumgebungen **(I)** = $(4,4,3)$ $(4,10,4)$ $(10,10,3)$ $(4,10,4)$, **(II)** = $(4,10,4)$ $(3,4,3,4)$ $(3,10,10)$ und **(III)** = $(3,4,4)$ $(3,4,3,4)$ $(4,4,10)$. Fangen wir mit **(I)** und da mit einem $(3,10,10)$ innen an. An allen seinen 10-Ecken liegen dann $(4,4,10)$ und zwischen diesen $(3,4,4)$ mit deren 4-Ecken auf denen der $(4,4,10)$. Damit bekommen wir an der inneren Zelle Lücken, die innen ein 3-Eck, dann drei 4-Ecke und zwischen diesen wieder 3-Ecke haben. Hier passen zusammen mit **(II)** und **(III)** nur $(3,4,3,4)$. Jetzt können an den äußeren 10-Ecken der ersten Schicht $(4,4,10)$ weitere $(3,10,10)$ angebracht werden, bei denen benachbarte über weitere $(4,4,10)$ verbunden sind. Es bilden sich wieder Lücken, in die $(3,4,4)$ und $(3,4,3,4)$ passen usw. Diese Konstruktion schließt sich widerspruchsfrei [# 62].

7.2.71 Radius ≈ 11.25211

In dieser Gruppe gibt es die drei Kantenumgebungen $(4,4,3)(4,10,6)(4,10,6)$, $(6,6,3)$ $(6,10,4)$ $(6,10,4)$ und $(3,4,4)$ $(3,6,6)$ $(4,6,10)$. Fangen wir mit einem $(4,6,10)$ innen an und konstruieren die erste Kantenumgebung an allen 10-Ecken, d.h. wir kleben an alle 10-Ecke einen weiteren $(4,6,10)$ in der Art, dass die 4- und 6-Ecke jeweils aufeinander zeigen, und dazwischen auf den 4-Ecken des inneren $(4,6,10)$ in passender Orientierung $(3,4,4)$. Dann bekommen wir Lücken in der Form, dass innen ein 6-Eck liegt, an dem drei 3- und drei 6-Ecke liegen; hier passen nur $(3,6,6)$ hinein, was auch mit der zweiten und dritten Kantenumgebung nur möglich ist. Außen an diesen $(3,6,6)$ sind jetzt noch Lücken für weitere $(3,4,4)$. Dann können wir außen weitere $(4,6,10)$, $(3,6,6)$ und $(3,4,4)$ anfügen, bis das Polychor geschlossen ist [# 63].

7.2.72 Radius ≈ 12.78665

Zu diesem Radius gehören die vier Kantenumgebungen **(I)** = $(4,10,4)(4,4,6)$ $(4,10,6)$, **(II)** = $(4,10,4)(4,6,6)(6,10,4)$, **(III)** = $(4,6,4)(6,6,4)(4,6,10)$ und **(IV)** = $(4,6,4)(4,6,6)(4,4,10)$. Beginnen wir mit einem $(4,6,10)$ innen. Nach den vier Kantenumgebungen passen auf dessen 10-Ecke nur $(4,4,10)$. Dann

sind mit **(I)** die $(4,4,6)$ auf den 4-Ecken der inneren Zelle und mit **(II)**, **(III)** und **(IV)** die $(4,6,6)$ auf den 6-Ecken festgelegt. Nun passen auf den Außenseiten der $(4,4,10)$ weitere $(4,6,10)$, die dann auch mit den schon vorhandenen $(4,4,6)$ und $(4,6,6)$ zusammenfallen. Jetzt können wir mit den vier Kantenumgebungen zwischen den neuen $(4,6,10)$ weitere $(4,4,6)$ und $(4,6,6)$ anfügen, an den freien 10-Ecken weitere $(4,4,10)$ usw. Auch diese Konstruktion führt widerspruchsfrei zu einem uniformen Polychor [# 64].

7.3 Zusammenfassung der möglichen uniformen Polychora

Durch die Einzelbetrachtungen der restlichen 72 Gruppen bekommen wir neben den Eckenumgebungen der antiprismatischen und Biprismachora 64 mögliche Eckenumgebungen von Polychora. Da uniforme Polychora über Eckentransitivität verfügen und wir bei den Einzelbetrachtungen keine Eckenumgebung gefunden haben, die zu verschiedenen Polychora führt, beschreiben die gefundenen Eckenumgebungen die gesuchten Polychora eindeutig. Die Existenz folgt im nächsten Kapitel.

#	Eckenumgebung
1	3 $(3,3,3)$
2	8 $(3,3,3)$; um jede Kante vier Zellen.
3	2 $(3,3,3)$, 3 $(3,3,3,3)$. Die beiden $(3,3,3)$ berühren sich nur an einer Ecke.
4	1 $(3,3,3)$, 3 $(3,4,4)$
5	1 $(3,3,3,3)$, 4 $(3,4,4)$
6	4 $(4,4,4)$
7	6 $(3,3,3,3)$; um jede Kante drei Zellen.
8	2 $(3,3,3)$, 6 $(3,4,4)$. Die $(3,3,3)$ berühren sich nur an einer Ecke, die $(3,4,4)$ jeweils an 4-Ecken.
9	1 $(3,3,3,3,3)$, 5 $(3,4,4)$
10	2 $(4,4,4)$, 2 $(3,4,4)$, 1 $(3,4,3,4)$. Die $(4,4,4)$ bzw. die $(3,4,4)$ berühren sich nur an einer Kante.
11	2 $(3,4,3,4)$, 2 $(3,4,4)$, 1 $(3,3,3,3)$. Die $(3,4,3,4)$ berühren sich an einem 3-Eck, die $(3,4,4)$ nur an einer Ecke.
12	2 $(3,3,3)$, 3 $(3,4,3,4)$. Die $(3,4,3,4)$ berühren sich an 4-Ecken, die $(3,3,3)$ an einer Ecke.
13	1 $(3,3,3)$, 3 $(3,6,6)$. Die $(3,6,6)$ berühren sich an 6-Ecken.
14	1 $(3,6,6)$, 1 $(3,4,4)$, 2 $(4,4,6)$. Die $(4,4,6)$ berühren sich an einem 4-Eck.

7.3. ZUSAMMENFASSUNG DER MÖG. UNIFORMEN POLYCHORA 93

#	Eckenumgebung
15	4 (3,6,6). Jeweils zwei Zellen berühren sich an einem 3-Eck, beide 3-Ecke berühren sich nur an einer Ecke.
16	1 (3,3,3,3,4), 1 (4,4,4), 4 (3,4,4)
17	4 (4,4,4), 3 (3,4,4), 1 (3,3,3). Die (4,4,4) berühren sich an 4-Ecken, der (3,3,3) die drei (4,4,4) nur an Kanten.
18	1 (3,4,4,4), 1 (3,4,4), 3 (4,4,4)
19	1 (5,5,5), 3 (4,4,5)
20	1 (3,3,3,3), 4 (3,6,6). Die (3,6,6) berühren sich alle an einer Kante, benachbarte sogar an 6-Ecken.
21	1 (3,4,3,4), 1 (3,6,6), 1 (3,4,4), 2 (4,4,6). Die (4,4,6) berühren sich nur an einer Kante, der (3,4,4) und der (3,6,6) ebenfalls.
22	5 (3,3,3), 3 (3,3,3,3,3). Die drei (3,3,3,3,3) liegen um ein (3,3,3) herum und berühren sich an 3-Ecken.
23	12 (3,3,3), 2 (3,3,3,5). Die (3,3,3,5) berühren sich an den 5-Ecken. An anderen Kanten gibt es je fünf (3,3,3).
24	20 (3,3,3). Jeweils fünf (3,3,3) liegen um eine Kante.
25	1 (4,6,6), 1 (4,4,4), 2 (4,4,6). Die (4,4,6) berühren sich an einem 4-Eck.
26	1 (3,5,3,5), 2 (3,4,4), 2 (4,4,5). Die (3,4,4) bzw. die (4,4,5) berühren sich nur an einer Kante.
27	3 (3,4,3,4), 2 (4,4,4). Die (4,4,4) berühren sich nur an einer Ecke, die (3,4,3,4) an 3-Ecken.
28	2 (4,6,6), 1 (3,6,6), 1 (3,4,4). Die (4,6,6) berühren sich an einem 6-Eck.
29	1 (3,8,8), 1 (3,4,4), 2 (4,4,8). Die (4,4,8) berühren sich an einem 4-Eck.
30	2 (3,4,4,4), 1 (3,3,3,3), 2 (3,4,4). Die (3,4,4,4) berühren sich an einem 4-Eck, die (3,4,4) nur an einer Ecke.
31	2 (3,3,3,3), 8 (3,4,4). Die (3,3,3,3) berühren sich nur an einer Ecke.
32	2 (4,6,6), 2 (3,6,6). Die (4,6,6) berühren sich an einem 4-Eck, die (3,6,6) an einem 3-Eck.
33	3 (3,8,8), 1 (3,3,3). Die (3,8,8) laufen mit ihren 8-Ecken um eine Kante.
34	1 (3,3,3,3,5), 4 (3,4,4), 1 (4,4,5)
35	2 (4,6,6), 2 (4,4,6). Die (4,6,6) berühren sich an einem 6-Eck, die (4,4,6) an einem 4-Eck.
36	1 (3,4,5,4), 1 (3,4,4), 2 (4,4,4), 1 (4,4,5). Die (4,4,4) berühren sich nur an einer Kante.
37	1 (3,4,4,4), 1 (3,6,6), 2 (4,4,6), 1 (4,4,4). Die (4,4,6) berühren sich nur an einer Kante.

#	Eckenumgebung
38	1 (4,6,8), 1 (4,4,4), 1 (4,4,6), 1 (4,4,8)
39	1 (5,6,6), 1 (4,4,5), 2 (4,4,6). Die (4,4,6) berühren sich an einem 4-Eck.
40	2 (3,4,4,4), 1 (3,4,3,4), 2 (3,4,4). Die (3,4,4,4) berühren sich an einem 3-Eck, die (3,4,4) nur an einer Ecke.
41	1 (3,8,8), 1 (3,4,3,4), 1 (3,4,4), 2 (4,4,8). Die (4,4,8) berühren sich nur an einer Kante.
42	3 (4,6,6), 1 (4,4,4). Je zwei (4,6,6) berühren sich an 6-Ecken.
43	2 (4,6,8), 1 (3,6,6), 1 (3,4,4). Die (4,6,8) berühren sich an einem 8-Eck.
44	1 (3,10,10), 1 (3,4,4), 2 (4,4,10). Die (4,4,10) berühren sich an einem 4-Eck.
45	2 (3,3,3,3,3), 5 (3,3,3,3). Die (3,3,3,3,3) berühren sich nur an einer Ecke.
46	4 (3,8,8)
47	1 (4,6,6), 1 (3,4,4,4), 1 (3,4,4), 2 (4,4,6). Die (4,4,6) berühren sich nur an einer Kante.
48	1 (4,6,8), 1 (4,6,6), 1 (4,4,6), 1 (4,4,8). (4,4,6) und (4,6,6) berühren sich an einem 6-Eck.
49	4 (5,5,5)
50	1 (4,6,10), 1 (4,4,4), 1 (4,4,6), 1 (4,4,10)
51	2 (4,6,8), 1 (3,8,8), 1 (3,4,4). Die (4,6,8) berühren sich an einem 6-Eck, der (3,8,8) und der (3,4,4) am 3-Eck.
52	3 (3,5,3,5), 2 (3,3,3). Die (3,3,3) berühren sich nur an einer Ecke, die (3,5,3,5) jeweils an einem 5-Eck.
53	1 (3,3,3,3,3), 5 (3,6,6). Alle (3,6,6) umlaufen eine Kante, und Nachbarn berühren sich dabei an 6-Ecken.
54	2 (4,6,8), 2 (4,4,6). Die (4,6,8) berühren sich an einem 8-Eck, die (4,4,6) an einem 4-Eck.
55	1 (5,5,5), 1 (3,3,3), 3 (3,4,4), 3 (4,4,5). (5,5,5) und (3,3,3) berühren sich nur an einer Ecke, (3,4,4) und (4,4,5) an 4-Ecken.
56	1 (3,5,3,5), 2 (3,4,3,4), 2 (4,4,5). Die (3,4,3,4) berühren sich an einem 3-Eck, die (4,4,5) nur an einer Ecke.
57	2 (3,4,5,4), 1 (3,3,3,3), 2 (3,4,4). Die (3,4,5,4) berühren sich an einem 5-Eck, die (3,4,4) nur an einer Ecke.
58	2 (5,6,6), 2 (3,6,6). Die (5,6,6) berühren sich an einem 5-Eck, die (3,6,6) an einem 3-Eck.
59	3 (3,10,10), 1 (3,3,3). Je zwei (3,10,10) berühren sich an einem 10-Eck.
60	1 (3,4,5,4), 1 (3,6,6), 2 (4,4,6), 1 (4,4,5). Die (4,4,6) berühren sich

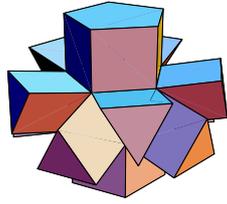
#	Eckenumgebung
61	nur an einer Kante, (4,4,5) und (4,4,6) an 4-Ecken. 1 (5,6,6), 2 (4,6,6), 1 (4,4,5). Die (4,6,6) berühren sich an einem 6-Eck.
62	1 (3,10,10), 1 (3,4,3,4), 1 (3,4,4), 2 (4,4,10). Die (4,4,10) berühren sich nur an einer Kante, (3,4,4) und (4,4,10) an 4-Ecken.
63	2 (4,6,10), 1 (3,6,6), 1 (3,4,4). Die (4,6,10) berühren sich an einem 10-Eck.
64	1 (4,6,10), 1 (4,6,6), 1 (4,4,6), 1 (4,4,10). (4,4,6) und (4,6,6) berühren sich an einem 6-Eck.

Neben diesen Polychora haben wir in den Einzelbetrachtungen noch weitere Polychora gefunden, die ebenfalls uniform sind: die p -antiprismatischen Prismachora für $p > 3$. Das sind Prismachora, deren Basen im Gegensatz zu den einfachen Prismachora nicht aus Platonischen oder Archimedischen Polyedern bestehen, sondern aus Antiprismen. In unseren Überlegungen haben wir alle bis $p = 14$ gefunden. Sie alle sehen gleich aus: Zwei p -Antiprismen, zwei p -Prismen und $2p$ 3-Prismen. Dabei sind die Keilwinkel der Prismen $(4,p,4)$ immer $\frac{\pi}{2}$ und der Keilwinkel $(3,p,3,3)$ für große p geht ebenfalls gegen $\frac{\pi}{2}$. Außerdem gehen die Keilwinkel $(4,4,p)$ bei den Prismen und $(3,3,3,p)$ bei den Antiprismen gegen π . Damit erhalten wir für die Keilwinkelsummen der Umgebung $(3,p,3,3)$ $(3,4,4)$ $(4,p,4)$, $(3,3,3,p)$ $(3,4,4)$ $(3,4,4)$ und $(4,4,p)$ $(4,4,3)$ $(4,4,3)(4,4,3)$ immer Werte, die kleiner als 2π und damit erlaubt sind. Und dass die Radien für die drei Kantenumgebungen zu gegebenen p gleich sind, ist leicht zu sehen. Also muss es diese p -prismatischen Prismachora für alle $p > 3$ geben (siehe auch Anhang C.4).

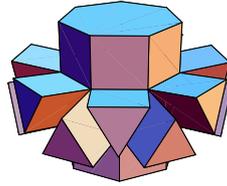
#	Eckenumgebung
	1 $(3,3,3,p)$, 3 $(3,4,4)$, 1 $(4,4,p) \forall p \geq 3$. Die $(3,4,4)$ liegen alle an einer Kante.

Außerdem tauchte im Lemma 2 die allgemeine Beschreibung für p,q -Biprismachora mit $p, q \geq 3$ auf. Auch diese haben wir für alle möglichen $p, q \leq 14$ gefunden. Dabei tauchten die Kantenumgebungen $(4,4,p)(4,q,4)$ $(4,q,4)$ und $(4,4,q)(4,p,4)(4,p,4)$ auf. Der Keilwinkel $(4,p,4)$ ist für alle $p \geq 3$ immer $\frac{\pi}{2}$ und $(4,4,p)$ bleibt für alle p immer kleiner als π und geht für $p \rightarrow \infty$ gegen π . Somit sind die Winkelsummen für beide Kantenumgebungen kleiner als 2π . Obendrein kann auch gezeigt werden, dass für beliebige aber feste $p, q \geq 3$ die Radien gleich sind. Somit existieren auch für beliebig große p und q die Biprismachora (siehe ebenfalls Anhang C.4).

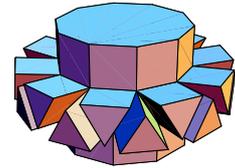
#	Eckenumgebung
	2 $(4,4,p)$, 2 $(4,4,q) \forall p, q \geq 3$. Das p - und das q -Eck berühren sich nur an einer Ecke.



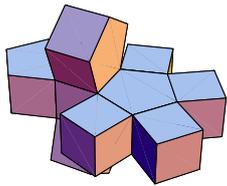
5-antiprismatisches
Prismachor



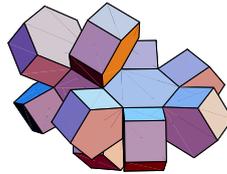
7-antiprismatisches
Prismachor



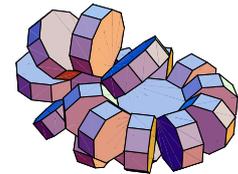
10-antiprismatisches
Prismachor



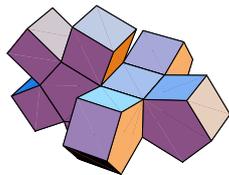
4,5-Biprismachor



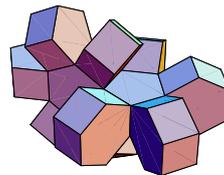
5,6-Biprismachor



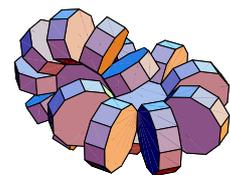
8,10-Biprismachor



5,4-Biprismachor



6,5-Biprismachor



10,8-Biprismachor

Kapitel 8

Angabe der uniformen Polychora

„Though various constructions of semiregular and uniform d -polytopes in dimensions $d \geq 4$ have been described, even for $d = 4$ it is not known whether the enumeration is complete.“

Branko Grünbaum (2003, [12])

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, wie viele und welche uniformen Polychora es höchstens geben kann. Am Ende des Kapitels wurden diese möglichen Polychora dann durch ihre Eckenumgebungen beschrieben. In diesem Kapitel wird die Existenz der gefundenen Zellkombinationen gezeigt und damit der Beweis komplettiert. Dabei werde ich die Konstruktionen der regelmäßigen Polychora (siehe z.B. Schläfli [19], Coxeter [7]) als bekannt voraussetzen und deren Eckkoordinaten nur angeben. Aus diesen können wir dann mit verschiedenen schon bekannten Verfahren (z.B. von Boole Stott [2], Gosset [11]) die Existenz der uniformen Polychora ableiten.

8.1 Die regelmäßigen Polychora

Der 5-Zeller (C_5) besteht aus fünf (3,3,3), zehn 3-Ecken, zehn Kanten und fünf Ecken. Diese haben die kartesischen Koordinaten $(1, 1, 1, 0)$, $(1, -1, -1, 0)$, $(-1, 1, -1, 0)$, $(-1, -1, 1, 0)$ und $(0, 0, 0, \sqrt{5})$. Des Weiteren liegen um eine Kante drei und um eine Ecke vier Zellen. Dieses Polychor ist auch unter dem Namen 4-Simplex bekannt. Abbildungen sind auf Seite 41 (Projektion) und auf Seite ?? (Abwicklung) zu sehen.

Der 8-Zeller (C_8) – Maßpolychor, Hyperwürfel oder auch Tesseract genannt – besteht aus acht (4,4,4), 24 4-Ecken, 32 Kanten und 16 Ecken mit den

kartesischen Koordinaten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$. An jeder Kante liegen drei und an jeder Ecke vier Zellen. Eine Zentralprojektion ist auf Seite 42, eine Abwicklung auf Seite 9 zu finden. Auch in der Malerei sind Abwicklungen höher-dimensionaler Würfel zu finden, wie z.B. bei Salvador Dalí (siehe Seite 10).

Der 16-Zeller (C_{16}) – auch Kreuzpolychor genannt – besitzt 16 $(3,3,3)$, 32 3-Ecke, 24 Kanten und acht Ecken. Die Koordinaten der Ecken sind $(\pm 1, 0, 0, 0)$ und alle Permutationen. Um jede Kante findet man vier Zellen und um jede Ecke acht. Auch vom 16-Zeller gibt es auf Seite 33 und 42 Abbildungen.

Der 24-Zeller (C_{24}) hat 24 $(3,3,3,3)$, 96 3-Ecke, 96 Kanten und 24 Ecken mit den Koordinaten $(\pm 1, 0, 0, 0)$ und alle Permutationen und $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$. Zu jeder Ecke gibt es sechs Zellen und entlang jeder Kante liegen drei $(3,3,3,3)$. Für Abbildungen siehe Seite 6 und 46.

Der 120-Zeller (C_{120}) besitzt 120 $(5,5,5)$, 720 5-Ecke, 1200 Kanten und 600 Ecken. Dabei legen sich um jede Kante drei Zellen und um jede Ecke vier. Diese Ecken sind $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$, $(\pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$, $(\pm \frac{\tau}{2}, \pm \frac{\tau}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2\tau^2})$ und $(\pm \frac{\tau^2}{2}, \pm \frac{1}{2\tau}, \pm \frac{1}{2\tau}, \pm \frac{1}{2\tau})$ jeweils mit allen Permutationen und $(\pm \frac{\tau^2}{2}, \pm \frac{1}{2\tau^2}, \pm \frac{1}{2}, 0)$, $(\pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \pm \frac{1}{2\tau}, \pm \frac{\tau}{2}, 0)$ und $(\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\tau}{2}, \pm \frac{1}{2\tau})$ jeweils mit den geraden Permutationen. Hierbei ist τ die goldene Schnittzahl $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Eine Abwicklung ist auf Seite 28 und eine Zentralprojektion auf Seite 47 dargestellt.

Der 600-Zeller (C_{600}) besteht aus 600 $(3,3,3)$, drei um jede Kante, 1200 3-Ecken, 720 Kanten und 120 Ecken, um die jeweils zwanzig Zellen liegen. Dabei sind $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$, $(\pm 1, 0, 0, 0)$ mit allen Permutationen, und $(\pm \frac{\tau}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2\tau}, 0)$ mit allen geraden Permutationen die kartesischen Koordinaten der Ecken. τ ist dabei ebenfalls die goldene Schnittzahl $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Der 600-Zeller ist auf den Seiten 34 und 48 abgebildet.

8.2 Expansion und Kontraktion

Die beiden von Alicia Boole Stott beschriebenen Operationen [2] stellen eine Möglichkeit dar, aus den regelmäßigen Polychora halbregelmäßige zu bekommen. Dabei sei O der Polychormittelpunkt des regelmäßigen Polychors und l_0, l_1, l_2, l_3 die Begrenzungen (engl. Limits), d.h. Ecken, Kanten, Flächen und Zellen, des Polychors. Seien weiter M_1, M_2 und M_3 die Mittelpunkte der Begrenzungen l_1, l_2 und l_3 . Dann besteht die Operation der Expansion e_k darin, alle Begrenzungen l_k gleich weit (und simultan) von O auf den gedachten Linien OM_k parallel und mit konstanter Länge so weit wegzubewegen,

bis die Ecken benachbarter Begrenzungen, welche im Originalpolychor zusammenfielen, jetzt den gleichen Abstand zueinander haben wie die Kantenlänge der Begrenzungen. Das neue (halbregelmäßige) Polychor besteht jetzt aus der konvexen Hülle der nach außen geschobenen Begrenzungen l_k . Als Beispiel betrachten wir den Hexaeder $(4,4,4)$. Dann führt die Expansion e_1 der Kanten l_1 zu einem Polyeder, dessen zwölf Kanten nun soweit nach außen geschoben sind, dass die Kantenenden wieder den Abstand der Kantenlänge zueinander haben. Damit bilden immer drei Kantenenden – zur Erinnerung: im Hexaeder treffen an jeder Ecke drei Kanten zusammen – ein 3-Eck, und aus den ehemaligen 4-Ecken des $(4,4,4)$ werden 8-Ecke. Damit ist $e_1(4,4,4) = (3,8,8)$. Natürlich können verschiedene Expansionen e_k und e_h auch hintereinander ausgeführt werden. Es stellt sich aber heraus, dass diese Expansionen kommutieren. Es gibt also für Polychora nur die sieben Expansionen $e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3$ und $e_1e_2e_3$.

Die Operation der Kontraktion c_k ist nun die inverse Operation zur Expansion. Wenn wir ein schon expandiertes Polychor wieder kontrahieren, dann bewegen wir die Begrenzungen wieder soweit nach innen, bis die Ecken der Begrenzungen wieder zusammenfallen. Hierbei müssen zwei Bedingungen erfüllt sein: Erstens muss das Polychor die konvexe Hülle der Begrenzungen sein, die kontrahiert werden. Und zweitens dürfen sich keine zwei Begrenzungen berühren, d.h. die Begrenzungen, die kontrahiert werden sollen, müssen alle mindestens eine Kantenlänge voneinander entfernt sein. Hierbei ist c_0 die Kontraktion, die diejenigen Teile des Polychors annulliert, welche mit den Ecken des neuen Polychors korrespondieren. Analog würde c_1 Teile auflösen, die dann zu neuen Kanten zusammenfallen usw. Dabei zeigt sich, dass es nur eine Kontraktion gibt, die die expandierten Begrenzungen jeweils auf einen Punkt zusammenfallen lässt und neue Polychora erzeugt, ähnlich denen, die sich bei der Begrenzungen nicht berühren. Beim expandierten Hexaeder, dem $(3,8,8)$ vom vorherigen Absatz, würden wir jetzt durch eine Kontraktion die expandierten Kanten zwischen zwei 3-Ecken – die 8-Ecke können wir nicht kontrahieren, da sie sich berühren, und eine Kontraktion der 3-Ecke würde wieder zum Hexaeder führen – zusammenfallen lassen. Wir bewegen also nur die 3-Ecke nach innen, bis sie sich berühren. Wir erhalten einen $(3,4,3,4)$. Somit können wir die Kontraktion einfach mit c bezeichnen und erhalten $ce_1(4,4,4) = c(3,8,8) = (3,4,3,4)$.

Da die Expansion und Kontraktion sehr anschauliche Operationen sind, die die Polychora stetig und auf regelmäßige Art verformen, ist die Existenz der neuen Polychora sofort klar. Die Berechnung der Koordinaten überlassen wir dem geneigten Leser. Leider führen verschiedene Operationen auch zu gleichen Polychora; somit ist ein Polychor nicht eindeutig durch eine Opera-

tion beschrieben. Um aber die Existenz der Polychora zu zeigen, genügt es, zu den Polychora nur eine Operation anzugeben. Wir müssen also unsere Polychora mit denen von Boole Stott vergleichen bzw. identifizieren können. Diese Identifikation erfolgt durch die Eckenumgebungen, die wir jetzt nur noch von den durch die Operationen erzeugten Polychora ablesen müssen. Liegen z.B. nur Rest- oder Eckzellen vor, dann haben wir ein regelmäßiges Polychor, von dem wir die Eckenumgebung kennen. Liegen nur Rest- und Eckzellen vor, dann erinnern wir uns an die Kantensymmetrie und können dann an einer Ecke eine Eckzelle und so viele Restzellen n zählen, wie Zellen vorher im regelmäßigen Polychor um eine Kante lagen. Wird dieses Polychor allerdings wieder kontrahiert, verschwindet die Kante, um die die Restzellen liegen, und wir erhalten zwei Eck- und n Restzellen. Existieren in der Tabelle auch noch Kantenzellen, dann liegen an jeder Ecke eine Eckzelle, eine Kantenzelle und zwei Restzellen. Und gibt es schließlich auch noch Flächenzellen, dann kommen an jeder Ecke eine Ecken-, eine Kanten-, eine Flächen- und eine Restzelle vor. Durch kurzes Überlegen bekommt man auch die Eckenumgebungen bei den wieder kontrahierten Polychora heraus.

Im Folgenden werden die Ableger der sechs regelmäßigen Polychora tabellarisch dargestellt, die mit einer Expansion bzw. Kontraktion erzeugt werden, jeweils mit der Nummer des entsprechenden, von uns gefundenen Polychors versehen.

Symbol nach Boole Stott	Rest- zellen	Flächen- zellen	Kanten- zellen	Eck- zellen	#
	5 mal	10 mal	10 mal	5 mal	
C_5	(3,3,3)				# 1
e_1C_5	(3,6,6)			(3,3,3)	# 13
e_2C_5	(3,4,3,4)		(3,4,4)	(3,3,3,3)	# 11
e_3C_5	(3,3,3)	(3,4,4)	(3,4,4)	(3,3,3)	# 8
$e_1e_2C_5$	(4,6,6)		(3,4,4)	(3,6,6)	# 28
$e_1e_3C_5$	(3,6,6)	(4,4,6)	(3,4,4)	(3,4,3,4)	# 21
$e_2e_3C_5$	(3,4,3,4)	(3,4,4)	(4,4,6)	(3,6,6)	# 21
$e_1e_2e_3C_5$	(4,6,6)	(4,4,6)	(4,4,6)	(4,6,6)	# 35
ce_1C_5	(3,3,3,3)			(3,3,3)	# 3
ce_2C_5	(3,3,3)			(3,3,3,3)	# 3
ce_3C_5				(3,3,3)	# 1

Symbol nach Boole Stott	Rest- zellen	Flächen- zellen	Kanten- zellen	Eck- zellen	#
	5 mal	10 mal	10 mal	5 mal	
$ce_1e_2C_5$	(3,6,6)			(3,6,6)	# 15
$ce_1e_3C_5$	(3,3,3,3)	(3,4,4)		(3,4,3,4)	# 11
$ce_2e_3C_5$	(3,3,3)			(3,6,6)	# 13
$ce_1e_2e_3C_5$	(3,6,6)	(3,4,4)		(4,6,6)	# 28
	8 mal	24 mal	32 mal	16 mal	
C_8	(4,4,4)				# 6
e_1C_8	(3,8,8)			(3,3,3)	# 33
e_2C_8	(3,4,4,4)		(3,4,4)	(3,3,3,3)	# 30
e_3C_8	(4,4,4)	(4,4,4)	(3,4,4)	(3,3,3)	# 17
$e_1e_2C_8$	(4,6,8)		(3,4,4)	(3,6,6)	# 43
$e_1e_3C_8$	(3,8,8)	(4,4,8)	(3,4,4)	(3,4,3,4)	# 41
$e_2e_3C_8$	(3,4,4,4)	(4,4,4)	(4,4,6)	(3,6,6)	# 37
$e_1e_2e_3C_8$	(4,6,8)	(4,4,8)	(4,4,6)	(4,6,6)	# 48
ce_1C_8	(3,4,3,4)			(3,3,3)	# 12
ce_2C_8	(3,3,3,3)			(3,3,3,3)	# 7
ce_3C_8				(3,3,3)	# 2
$ce_1e_2C_8$	(4,6,6)			(3,6,6)	# 32
$ce_1e_3C_8$	(3,4,3,4)	(4,4,4)		(3,4,3,4)	# 27
$ce_2e_3C_8$	(3,3,3,3)			(3,6,6)	# 20
$ce_1e_2e_3C_8$	(4,6,6)	(4,4,4)		(4,6,6)	# 42
	16 mal	32 mal	24 mal	8 mal	
C_{16}	(3,3,3)				# 2
e_1C_{16}	(3,6,6)			(3,3,3,3)	# 20
e_2C_{16}	(3,4,3,4)		(4,4,4)	(3,4,3,4)	# 27
e_3C_{16}	(3,3,3)	(3,4,4)	(4,4,4)	(4,4,4)	# 17
$e_1e_2C_{16}$	(4,6,6)		(4,4,4)	(4,6,6)	# 42
$e_1e_3C_{16}$	(3,6,6)	(4,4,6)	(4,4,4)	(3,4,4,4)	# 37
$e_2e_3C_{16}$	(3,4,3,4)	(3,4,4)	(4,4,8)	(4,6,6)	# 41
$e_1e_2e_3C_{16}$	(4,6,6)	(4,4,6)	(4,4,8)	(4,6,8)	# 48
ce_1C_{16}	(3,3,3,3)			(3,3,3,3)	# 7
ce_2C_{16}	(3,3,3)			(3,4,3,4)	# 12
ce_3C_{16}				(4,4,4)	# 6
$ce_1e_2C_{16}$	(3,6,6)			(4,6,6)	# 32
$ce_1e_3C_{16}$	(3,3,3,3)	(3,4,4)		(3,4,4,4)	# 30
$ce_2e_3C_{16}$	(3,3,3)			(3,8,8)	# 33
$ce_1e_2e_3C_{16}$	(3,6,6)	(3,4,4)		(4,6,8)	# 43

Symbol nach Boole Stott	Rest- zellen	Flächen- zellen	Kanten- zellen	Eck- zellen	#
	24 mal	96 mal	96 mal	24 mal	
C_{24}	(3,3,3,3)				# 7
e_1C_{24}	(4,6,6)			(4,4,4)	# 42
e_2C_{24}	(3,4,4,4)		(3,4,4)	(3,4,3,4)	# 40
e_3C_{24}	(3,3,3,3)	(3,4,4)	(3,4,4)	(3,3,3,3)	# 31
$e_1e_2C_{24}$	(4,6,8)		(3,4,4)	(3,8,8)	# 51
$e_1e_3C_{24}$	(4,6,6)	(4,4,6)	(3,4,4)	(3,4,4,4)	# 47
$e_2e_3C_{24}$	(3,4,4,4)	(3,4,4)	(4,4,6)	(4,6,6)	# 47
$e_1e_2e_3C_{24}$	(4,6,8)	(4,4,6)	(4,4,6)	(4,6,8)	# 54
ce_1C_{24}	(3,4,3,4)			(4,4,4)	# 27
ce_2C_{24}	(4,4,4)			(3,4,3,4)	# 27
ce_3C_{24}				(3,3,3,3)	# 7
$ce_1e_2C_{24}$	(3,8,8)			(3,8,8)	# 46
$ce_1e_3C_{24}$	(3,4,3,4)	(3,4,4)		(3,4,4,4)	# 40
$ce_2e_3C_{24}$	(4,4,4)			(4,6,6)	# 42
$ce_1e_2e_3C_{24}$	(3,8,8)	(3,4,4)		(4,6,8)	# 51
	120 mal	720 mal	1200 mal	600 mal	
C_{120}	(5,5,5)				# 49
e_1C_{120}	(3,10,10)			(3,3,3)	# 59
e_2C_{120}	(3,4,5,4)		(3,4,4)	(3,3,3,3)	# 57
e_3C_{120}	(5,5,5)	(4,4,5)	(3,4,4)	(3,3,3)	# 55
$e_1e_2C_{120}$	(4,6,10)		(3,4,4)	(3,6,6)	# 63
$e_1e_3C_{120}$	(3,10,10)	(4,4,10)	(3,4,4)	(3,4,3,4)	# 62
$e_2e_3C_{120}$	(3,4,5,4)	(4,4,5)	(4,4,6)	(3,6,6)	# 60
$e_1e_2e_3C_{120}$	(4,6,10)	(4,4,10)	(4,4,6)	(4,6,6)	# 64
ce_1C_{120}	(3,5,3,5)			(3,3,3)	# 52
ce_2C_{120}	(3,3,3,3,3)			(3,3,3,3)	# 45
ce_3C_{120}				(3,3,3)	# 24
$ce_1e_2C_{120}$	(5,6,6)			(3,6,6)	# 58
$ce_1e_3C_{120}$	(3,5,3,5)	(4,4,5)		(3,4,3,4)	# 56
$ce_2e_3C_{120}$	(3,3,3,3,3)			(3,6,6)	# 53
$ce_1e_2e_3C_{120}$	(5,6,6)	(4,4,5)		(4,6,6)	# 61

Symbol nach Boole Stott	Rest- zellen	Flächen- zellen	Kanten- zellen	Eck- zellen	#
	600 mal	1200 mal	720 mal	120 mal	
C_{600}	(3,3,3)				# 24
$e_1 C_{600}$	(3,6,6)			(3,3,3,3,3)	# 53
$e_2 C_{600}$	(3,4,3,4)		(4,4,5)	(3,5,3,5)	# 56
$e_3 C_{600}$	(3,3,3)	(3,4,4)	(4,4,5)	(5,5,5)	# 55
$e_1 e_2 C_{600}$	(4,6,6)		(4,4,5)	(5,6,6)	# 61
$e_1 e_3 C_{600}$	(3,6,6)	(4,4,6)	(4,4,5)	(3,4,5,4)	# 60
$e_2 e_3 C_{600}$	(3,4,3,4)	(3,4,4)	(4,4,10)	(3,10,10)	# 62
$e_1 e_2 e_3 C_{600}$	(4,6,6)	(4,4,6)	(4,4,10)	(4,6,10)	# 64
$ce_1 C_{600}$	(3,3,3,3)			(3,3,3,3,3)	# 45
$ce_2 C_{600}$	(3,3,3)			(3,5,3,5)	# 52
$ce_3 C_{600}$				(5,5,5)	# 49
$ce_1 e_2 C_{600}$	(3,6,6)			(5,6,6)	# 58
$ce_1 e_3 C_{600}$	(3,3,3,3)	(3,4,4)		(3,4,5,4)	# 57
$ce_2 e_3 C_{600}$	(3,3,3)			(3,10,10)	# 59
$ce_1 e_2 e_3 C_{600}$	(3,6,6)	(3,4,4)		(4,6,10)	# 63

8.3 Prismatisches Hochziehen

Ein anderes Verfahren, Polychora mit den gesuchten Eigenschaften zu bekommen, ist das Hochziehen H eines uniformen Polyeders in die vierte Dimension. Ein Polyeder verbleibt als Basis B in der 3-dimensionalen Hyperebene, der zweite (gleiche) wird senkrecht zu dieser Hyperebene entlang der vierten Dimension – ohne verdreht zu werden – so weit verschoben, bis die Entfernung zwischen korrespondierenden Ecken gleich der Kantenlänge der Polyeder ist. Da dieses Objekt mit seiner Erzeugung den Prismen im Anschauungsraum nicht unähnlich ist, nennen wir es – wie schon im vorigen Kapitel – Prismachor. Das Prismachor besteht also aus der konvexen Hülle der beiden parallelen Polyeder. Da bei der Verschiebung natürlich auch die Flächen mitverschoben wurden und also zu jeder Fläche des Basispolyeders eine parallele im anderen Polyeder zu finden ist, bilden diese Flächenpaare mit den Verbindungskanten korrespondierender Ecken Prismen; und zwar genauso viele, wie Fläche im Polyeder zu finden sind. Analytisch ausgedrückt können wir uns die Eckkoordinaten der Platonischen oder Archimedischen Polyeder (siehe z.B. [15]) mit der Kantenlänge k nehmen und jeder Ecke die vierte Koordinate Null anhängen. Dann haben die anderen Eckkoordinaten die gleichen Werte – bis auf die vierte Koordinate, die jetzt den Wert k annimmt.

Damit besteht das Prismachor $H(B)$ aus zwei Basiszellen B und für jede Fläche einer Basiszelle ein entsprechendes Prisma. So besteht z.B. ein Prismachor mit einem stumpfen Hexaeder $(3,8,8)$ als Basis aus zwei $(3,8,8)$, sechs $(4,4,8)$ und acht $(3,4,4)$. Dann ist aber auch die Eckenumgebung dieser uniformen Polychora bestimmt: Für ein Prismachor mit Basis (x,y,z) – analog mit Zellen, deren Ecken an vier oder fünf Flächen grenzen – liegen um jede Ecke ein (x,y,z) , ein $(4,4,x)$, ein $(4,4,y)$ und ein $(4,4,z)$.

Dieses Verfahren funktioniert natürlich auch mit Prismen $(4,4,p)$ und Antiprismen $(3,3,3,p)$ als Basis. Da es aber von beiden unendlich viele gibt, wurden sie bei den Einzelbetrachtungen in Kapitel 7 nicht mitgezählt. Aber auch für sie gilt das oben Gesagte bezüglich Zusammensetzung und Eckenumgebung. Wir haben also zusätzlich zu den 64 gefundenen uniformen Polychora die beiden unendlichen Prismachor-Gruppen mit Prismen bzw. Antiprismen als Basis (siehe auch Anhang C.4 ab Seite 178).

Es folgt jetzt eine Tabelle mit allen Polychora, die wir durch das Hochziehen H in die vierte Richtung erhalten.

Basis	Basis- und Seitenzellen	#
Tetraeder	$2(3,3,3), 4(3,4,4)$	# 4
Hexaeder	$2(4,4,4), 6(4,4,4)$	# 6
Oktaeder	$2(3,3,3,3), 8(3,4,4)$	# 5
Dodekaeder	$2(5,5,5), 12(4,4,5)$	# 19
Ikosaeder	$2(3,3,3,3,3), 20(3,4,4)$	# 9
stumpfer Tetraeder	$2(3,6,6), 4(4,4,6), 4(3,4,4)$	# 14
stumpfer Hexaeder	$2(3,8,8), 6(4,4,8), 8(3,4,4)$	# 29
stumpfer Oktaeder	$2(4,6,6), 8(4,4,6), 6(4,4,4)$	# 25
stumpfer Dodekaeder	$2(3,10,10), 12(4,4,10), 20(3,4,4)$	# 44
stumpfer Ikosaeder	$2(5,6,6), 20(4,4,6), 12(4,4,5)$	# 39
Kubo-Oktaeder	$2(3,4,3,4), 6(4,4,4), 8(3,4,4)$	# 10
Ikosi-Dodekaeder	$2(3,5,3,5), 20(3,4,4), 12(4,4,5)$	# 26
Rhomben-Kubo- Oktaeder	$2(3,4,4,4), 18(4,4,4), 8(3,4,4)$	# 18
Rhomben-Ikosi- Dodekaeder	$2(3,4,5,4), 30(4,4,4), 20(3,4,4), 12(4,4,5)$	# 36

Basis	Basis- und Seitenzellen	#
großer Rhomben- Kubo-Oktaeder	2(4,6,8), 12(4,4,4), 8(4,4,6), 6(4,4,8)	# 38
großer Rhomben- Ikosi-Dodekaeder	2(4,6,10), 30(4,4,4), 20(4,4,6), 12(4,4,10)	# 50
schräger Hexaeder	2(3,3,3,3,4), 6(4,4,4), 32(3,4,4)	# 16
schräger Dodekaeder	2(3,3,3,3,5), 12(4,4,5), 80(3,4,4)	# 34
3-Prisma	2(3,4,4), 2(3,4,4), 3(4,4,4)	# 6
4-Prisma	2(4,4,4), 2(4,4,4), 4(4,4,4)	
5-Prisma	2(4,4,5), 2(4,4,5), 5(4,4,4)	
⋮	⋮ ⋮ ⋮	
p -Prisma	2(4,4, p), 2(4,4, p), p (4,4,4) $\forall p \geq 3$	
3-Antiprisma	2(3,3,3,3), 2(3,4,4), 6(3,4,4)	# 5
4-Antiprisma	2(3,3,3,4), 2(4,4,4), 8(3,4,4)	
5-Antiprisma	2(3,3,3,5), 2(4,4,5), 10(3,4,4)	
⋮	⋮ ⋮ ⋮	
p -Antiprisma	2(3,3,3, p), 2(4,4, p), $2p$ (3,4,4) $\forall p \geq 3$	

8.4 Erzeugung der Biprismachora

Das nächste Verfahren $T(p, q)$ bezieht sich auf die schon erwähnten p, q -Biprismachora. Um diese zu erzeugen, müssen wir uns mit deren Abwicklungen ein wenig näher beschäftigen. Stellen wir uns ein p -Prisma ($p \geq 3$) vor, das vor uns auf einer seiner p -Ecken auf dem Tisch liegt. Jetzt legen wir weitere p -Prismen, jeweils p -Eck auf p -Eck darauf, bis ein Turm von q Prismen ($q \geq 3$) entsteht. Betrachten wir jetzt nur einen – von p – senkrechten Streifen, der aus q 4-Ecken besteht und der vom unteren Prisma bis zum oberen verläuft. Diesen Streifen können wir gedanklich vom Turm lösen und flach auf den Tisch legen. Jetzt ist es offensichtlich, dass wir diesen Streifen zu einem – mehr oder weniger eckigen – Ring aus q 4-Ecken zusammenrollen können, indem wir entlang der Kanten zwischen den 4-Ecken nach oben (senkrecht zur Streifen-Ebene) knicken und die freie Kante des ersten mit der freien Kante des letzten 4-Ecks zusammenkleben. Sind alle Knickwinkel gleich, erhalten wir ein regelmäßiges q -Prisma.

Kommen wir jetzt wieder zurück zu unserem Turm. Nun können wir jeden der p Streifen zu einem q -Prisma aufrollen. Versuchen wir es allerdings simultan, dann zerreißen wir im Anschauungsraum die p -Ecke des Turmes.

Wenn wir aber die Richtungen, in die wir die Streifen aufrollen, so wählen, dass wir nicht nur senkrecht zur Streifen-Ebene, sondern sogar senkrecht zum Turm (bzw. dessen 3-dimensionaler Hyperebene) knicken, dann wird klar, dass wir den Turm selbst auch aufrollen und dass dessen Deckel- p -Eck (die obere Fläche des Turmes) nun zusammenfällt mit der Grundfläche, auf der der Turm steht. Dies ist insbesondere deshalb einleuchtend, da diese p -Ecke aus p Kanten bestehen, die alle gleichzeitig, jeder in seinem Streifen, mit der entsprechenden Kante des unteren p -Ecks zusammenkommen. Wir erhalten also aus dem Turm $T(p, q)$ einen Ring von q gleichen p -Prismen und aus den Streifen einen Ring aus p gleichen q -Prismen, wobei beide Ringe senkrecht zueinander stehen und nur über 4-Ecke miteinander verbunden sind (siehe auch die Abwicklungen auf Seite 96). Deshalb nennen wir diese Polychora auch p, q -Biprismachora ($p, q \geq 3$; für $p, q > 14$ siehe Anhang C.4 ab Seite 178).

Diese Polychora $T(p, q)$ sind selbstverständlich uniform: An jeder Ecke liegen zwei p -Prismen (vom Turm) und zwei q -Prismen (von den Streifen). Als Sonderfall dieser Biprismachora haben wir im letzten Abschnitt schon $q = 4$ betrachtet. Dann haben wir nämlich folgende Situation: Einem p -Prisma geben wir die vierte Koordinate Null, parallel dazu einem zweiten p -Prisma die vierte Koordinate k (k sei die Kantenlänge). Dann bilden die beiden korrespondierenden p -Eckpaare zwei weitere p -Prismen (also sind es jetzt insgesamt vier) und die p Vierer-Streifen werden zu p 4-Prismen (=Hexaeder). Damit ist also die eine Gruppe von unendlichen Prismachora – nämlich die mit Prismen als Basis – nur ein Teil dieser Biprismachor-Gruppe.

Wie können wir jetzt auch analytisch die Existenz der p, q -Biprismachora einsehen? Betrachten wir erst einmal die Koordinaten eines p -Ecks in der Ebene auf dem Einheitskreis: $\left(\cos \frac{2\pi j}{p}, \sin \frac{2\pi j}{p}\right)$, $j = 0, \dots, p-1$. Nun müssen wir dieses p -Eck vergrößern um den Faktor r , bis dessen Kantenlänge 1 beträgt. Wir wissen nach dem oberen Bild auf Seite 15, dass der Zusammenhang $\frac{1}{2}l = r \sin \frac{\pi}{p}$ mit l als Kantenlänge existiert. Also können wir auflösen zu $r = \frac{1}{2} \csc \frac{\pi}{p}$. Damit bekommt unser p -Eck mit Kantenlänge 1 die Koordinaten $\left(\frac{1}{2} \csc \frac{\pi}{p} \cos \frac{2\pi j}{p}, \frac{1}{2} \csc \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi j}{p}\right)$, $j = 0, \dots, p-1$. Für jedes dieser p Ecken müssen wir jetzt ein q -Eck angeben, dessen Kantenlänge auch 1 ist, und das senkrecht auf der Ebene unseres p -Ecks steht. Also folgen dann die Ecken eines p, q -Biprismachors mit Kantenlänge 1:

$$\left(\frac{1}{2} \csc \frac{\pi}{p} \cos \frac{2\pi j}{p}, \frac{1}{2} \csc \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi j}{p}, \frac{1}{2} \csc \frac{\pi}{q} \cos \frac{2\pi k}{q}, \frac{1}{2} \csc \frac{\pi}{q} \sin \frac{2\pi k}{q}\right), j = 0, \dots, p-1$$

und $k = 0, \dots, q-1$.

p	q	Turm- und Streifenzellen	Existenz	#
3	3	3(3,4,4), 3(3,4,4)	$T(3,3)$	
3	4	4(3,4,4), 3(4,4,4)	$T(3,4)$	
3	5	5(3,4,4), 3(4,4,5)	$T(3,5)$	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	
3	q	$q(3,4,4), 3(4,4,q)$ $\forall q \geq 3$	$T(3,q)$	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	
4	3	3(4,4,4), 4(3,4,4)	$T(4,3)$	#6
4	4	4(4,4,4), 4(4,4,4)	$T(4,4)$	
4	5	5(4,4,4), 4(4,4,5)	$T(4,5)$	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	
4	q	$q(4,4,4), 4(4,4,q)$ $\forall q \geq 3$	$T(4,q)$	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	
5	3	3(4,4,5), 5(3,4,4)	$T(5,3)$	
5	4	4(4,4,5), 5(4,4,4)	$T(5,4)$	
5	5	5(4,4,5), 5(4,4,5)	$T(5,5)$	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	
5	q	$q(4,4,5), 5(4,4,q)$ $\forall q \geq 3$	$T(5,q)$	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	
p	q	$q(4,4,p), p(4,4,q)$ $\forall p, q \geq 3$	$T(p,q)$	
⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮	

8.5 Coxeters schräger 24-Zeller

In [7] befasst sich H.S.M. Coxeter mit den regelmäßigen und einigen halbregelmäßigen Polychora. Ab Seite 151 (*8.4 The snub{3,4,3}*) entwickelt er aus dem 24-Zeller ein uniformes Polychor $s\{3,4,3\}$, das aus 24 Ikosaedern und 120 Tetraedern besteht.

Coxeter fängt mit einem 24-Zeller an und schneidet dessen Ecken so tief ab, dass sich die entstehenden Hexaeder (4,4,4) berühren und die Restzellen Kubo-Oktaeder (3,4,3,4) sind – nach Boole Stott wäre das ein ce_1C_{24} . Dieses Polychor besteht aus 24 (4,4,4) und 24 (3,4,3,4) und besitzt an jeder Kante zwei (3,4,3,4) und einen (4,4,4). Damit sind die Flächen 3-Ecke (jeweils zwischen zwei Kubo-Oktaeder) und (regelmäßige) 4-Ecke (jeweils zwischen einem Hexaeder und einem Kubo-Oktaeder). Da nun jeder Hexaeder zwölf Kanten und 6 Flächen hat, besitzt das Polychor ce_1C_{24} 288 Kanten und 144

quadratische Flächen. Außerdem sind die 288 Kanten auch die Seiten von 96 3-Ecken, die durch das Eckenabschneiden aus den Flächen des 24-Zellers entstanden sind. Alles zusammen hat das ce_1C_{24} also 96 Ecken, 288 Kanten, $94+144$ Flächen und $24+24$ Zellen.

Anstatt nun die Ecken des 24-Zellers so abzuschneiden, dass sich die Eckzellen in der Mitte der Kanten berühren, teilt Coxeter die Kanten im Verhältnis $a : b$ (gleiches Verhältnis für alle Kanten) in Übereinstimmung mit deren kohärenter Indizierung ein (d.h. dass sich die kürzeren Abschnitte auf jedem 3-Eck der Zellen des 24-Zellers nicht berühren, an jeder Ecke auf jedem 3-Eck also ein Abschnitt a und ein Abschnitt b zusammenkommen). Damit bekommt Coxeter ein verzerrtes ce_1C_{24} , in dem jeder Kubo-Oktaeder durch einen (im Allgemeinen verzerrten) Ikosaeder ersetzt wird. Da die Teile a der Kanten an einer Ecke des 24-Zellers alternierend zur und von der Ecke weg zeigen, wird jeder Hexaeder durch ein verzerrtes Objekt ersetzt, das noch die Symmetrie des regelmäßigen Tetraeders (eingeschrieben im Hexaeder) hat. O.B.d.A. nimmt Coxeter $a \geq b$ an. Im Grenzfall $a = b$ wird aus dem verzerrten Ikosaeder ein Kubo-Oktaeder, der in jedem 4-Eck eine Diagonale eingezeichnet hat (derart, dass sich keine zwei Diagonalen in einer Kubo-Oktaeder-Ecke treffen). Jedes 4-Eck gehört aber auch zu einem verzerrten Hexaeder. Also sind hier ebenfalls einige Diagonalen eingezeichnet; aber welche? Die einzige Möglichkeit, die Symmetrie des Tetraeders zu erhalten, ist, die Diagonalen so einzuzichnen, dass sie einen eingeschriebenen Tetraeder formen. Damit wird der verzerrte Hexaeder aufgeteilt in fünf Tetraeder: einen regelmäßigen in der Mitte und vier in der Höhe gestauchte (=flache 3-Pyramiden), jeweils mit der größten Fläche am mittleren klebend. Wenn nun das Verhältnis $a : b$ wächst, bleiben zwar die regelmäßigen Tetraeder weiterhin regelmäßig, die gestauchten Tetraeder wachsen aber in die Höhe und es gibt keinen Grund anzunehmen, dass diese fünf Tetraeder in der gleichen 3-dimensionalen Hyperebene bleiben.

Jetzt vergleicht Coxeter das neue Polychor mit dem ce_1C_{24} : Es hat immer noch 96 Ecken und neben den 288 Orginalkanten kommen nun noch 144 neue Kanten dazu, eine pro Diagonale der 144 Quadrate. Und neben den 96 Orginal-3-Ecken haben wir nun 96 3-Ecke von den regelmäßigen Tetraedern (in den Mitten der Hexaeder) und 288 gleichschenklige 3-Ecke von den Hälften der geteilten 4-Ecke. Die 24 Hexaeder werden also zu 120 Tetraedern (von denen 24 immer regelmäßig sind) und die 24 Kubo-Oktaeder zu (im Allgemeinen verzerrten) Ikosaedern. An jeder der 288 Orginalkanten finden wir eine flache 3-Pyramide und zwei verzerrte Ikosaeder, an jeder der 144 neuen Kanten einen regelmäßigen Tetraeder, zwei 3-Pyramiden und einen verzerrten Ikosaeder.

Wenn nun $a : b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist, dann werden die Ikosaeder regelmäßig (siehe in Coxeters Arbeit [7], Kapitel 3.7) und somit alle 3-Ecke gleichseitig und alle flachen 3-Pyramiden regelmäßige Tetraeder. Auf diese Weise erhalten wir ein halbberegelmäßiges Polychor, von Coxeter Snub-24-Zeller oder $s\{3,4,3\}$ genannt, das 96 Ecken, $288+144$ Kanten, $96+96+288$ Flächen (3-Ecke), $24+96$ Tetraeder und 24 Ikosaeder hat. Einige Kanten sind von einem Tetraeder und zwei Ikosaedern (Kantenumgebung $(3,3,3) (3,3,3,3,3) (3,3,3,3,3)$), andere von drei Tetraedern und einem Ikosaeder (Kantenumgebung $(3,3,3) (3,3,3) (3,3,3,3,3)$) umgeben. An jeder Ecke liegen drei $(3,3,3,3,3)$ und fünf $(3,3,3)$. Damit haben wir die Existenz des Polychors mit unserer Nummer [# 22] bewiesen.

8.6 Conway und Guys „Großes Antiprismachor“

Das historisch zuletzt gefundene uniforme Polychor ist das „Grand Antiprism“ $s\{5 \times 5\}$, wie es seine Entdecker Conway und Guy [4] genannt hatten. Dieses Polychor besteht aus 20 5-Antiprismen und 300 Tetraedern. In ihrer 1965 veröffentlichten Zusammenfassung ihrer Arbeiten zu uniformen Polychora ist aber leider nicht mehr als diese Beschreibung enthalten. Obwohl (scheinbar) jeder, der sich längere Zeit mit diesem Thema beschäftigt hat, überzeugt ist, dass dieses Polychor existiert, ist mir kein konstruktiver Existenzbeweis bekannt.

Wir wissen, dass die Ecken des $s\{5 \times 5\}$ Teil der Eckenmenge des 600-Zellers sind. Und wir wissen, dass sich die 20 $(3,3,3,5)$ in zwei Ringe zu je zehn Antiprismen aufteilen, die senkrecht zueinander um den 600-Zeller herum laufen. Wie finden wir jetzt einen $(3,3,3,5)$ im 600-Zeller? Betrachten wir eine Ecke e_1 des 600-Zellers. Wir wissen, dass dort 12 Kanten und 20 Tetraeder auf regelmäßige Art und Weise zusammentreffen. Ein Entfernen von e_1 und aller Zellen darum herum würde ein Loch bilden, das die Form eines Ikosaeders hat. Und in diesem Ikosaeder finden wir durch jede Ecke fünf 5-Ecke. Damit haben wir aber schon ein $(3,3,3,5)$ im 600-Zeller gefunden: Nach Entfernen von e_1 bekommen wir ein Loch, in das ein $(3,3,3,5)$ und – darüber und darunter – zwei 5-Pyramiden (mit fünf regelmäßigen 3- und einem 5-Eck) passen. Bezeichnen wir die beiden Spitzen der Pyramiden mit e_0 und e_2 . Dann ist klar, dass im ursprünglichen 600-Zeller e_0 und e_2 nicht nur Nachbarn von e_1 , sondern auch von e_1 aus betrachtet auf gegenüber liegenden Seiten waren. Somit sind e_0 und e_2 in der ikosaedrischen Lücke gegenüber liegende Ecken. Entfernen wir auch e_2 und alle noch angrenzenden

Zellen, so durchdringen sich die beiden ikosaedrischen Löcher von e_1 und e_2 teilweise. Sie bilden jetzt ein Loch, dass aus zwei Ikosaedern besteht, denen man jeweils eine 5-Pyramide abgeschnitten hat, um sie dann an den Schnittflächen zusammenzukleben. Bezeichnen wir die neue obere Spitze des größeren Loches mit e_3 . Auch e_3 liegt, von e_2 aus betrachtet, auf der gegenüber liegenden Seite von e_1 . In einer Abwicklung würden also e_0 bis e_3 eine gerade Linie bilden. Und es ist naheliegend, diese Linie durch e_4 usw. fortzuführen. Für jede entfernte Ecke wächst die Lücke um ein 5-Antiprisma in der Mitte; die 5-Pyramide oben bewegt sich immer weiter. Nach Conway und Guy müssen wir aber nach e_9 wieder auf e_0 treffen und somit einen Ring von zehn (3,3,3,5) erhalten. Also treffen bei e_0 schließlich die Spitzen der beiden 5-Pyramiden zusammen; ein Entfernen von e_0 und aller noch angrenzenden Zellen beseitigt auch die Pyramiden und wir erhalten das zehnte 5-Antiprisma.

Da wir Ecken transitivität fordern, müssen dann aber an allen Ecken der zehn 5-Antiprismen gleiche Winkel zwischen entsprechenden Zellen vorliegen. Das ist nur der Fall, wenn die zehn Ecken e_0 bis e_9 – und damit auch die Antiprismen selbst – ein regelmäßiges 10-Eck bilden. Es stellt sich also als erstes die Frage, ob wir zehn Ecken im 600-Zeller finden, die ein regelmäßiges (und planares) 10-Eck bilden? Und wenn wir eines gefunden haben, dann müssen wir auch ein zweites regelmäßiges 10-Eck finden, dass senkrecht auf dem ersten steht und auch in der Eckenmenge des 600-Zellers enthalten ist.

Wiederholen wir noch einmal die Eckkoordinaten des C_{600} : $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$, $(\pm 1, 0, 0, 0)$ mit allen Permutationen und $(\pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2\tau}, 0)$ mit allen geraden Permutationen und $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ die Kantenlänge.

Wählen wir jetzt den Punkt $e_0 = (1, 0, 0, 0)$ und die beiden Punkte $e_9 = (\frac{1}{2\tau}, \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ und $e_1 = (\frac{1}{2\tau}, -\frac{\tau}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$. Wie man schnell nachrechnet, sind die Entfernungen von e_0 zu e_9 und zu e_1 jeweils τ .

$$\begin{aligned} \sqrt{(\frac{1}{2\tau} - 1)^2 + \frac{\tau^2}{4} + \frac{1}{4}} &= \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{\tau} - 2)^2 + \tau^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \tau - 2)^2 + \tau^2 + 1} = \\ \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - 2\tau + 1 + \tau^2 + 1} &= \frac{1}{2}\sqrt{2(\tau^2 - \tau + 1)} = \frac{1}{2}\sqrt{2(1 - \tau - \tau + 1)} = \\ \frac{1}{2}\sqrt{4(1 - \tau)} &= \sqrt{1 - \tau} = \tau. \end{aligned}$$

Dabei wurden die Zusammenhänge $\tau^2 = 1 - \tau$ und $\frac{1}{\tau} = 1 + \tau$ benutzt. Wenn e_9 , e_0 und e_1 Teil eines 10-Ecks sein sollen, dann muss die Entfernung zwischen e_9 und e_1 gleich der ersten Diagonale (eine Ecke überspringend) des 10-Ecks sein. Dessen Länge (mit Kantenlänge τ) ist

$$d_1 = \tau\sqrt{(1 + \cos \frac{2\pi}{10})^2 + \sin^2 \frac{2\pi}{10}} = \tau\sqrt{2(1 + \cos \frac{1}{5}\pi)} = \tau\sqrt{2(1 + \frac{1}{2}(1 + \tau))}.$$

Der Abstand von e_9 und e_1 ist

$$\begin{aligned}\sqrt{\tau^2 + 1} &= \tau\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2}} = \tau\sqrt{1 + (1 + \tau)^2} = \tau\sqrt{2(1 + \tau + \frac{1}{2}\tau^2)} = \\ &\tau\sqrt{2(1 + \tau + \frac{1}{2}(1 - \tau))} = \tau\sqrt{2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau)} = d_1.\end{aligned}$$

Jetzt suchen wir e_2 bis e_8 in der Ebene, die durch die drei Punkte aufgespannt wird. Dabei suchen wir in der Punktmenge des C_{600} und überprüfen immer die Abstände τ zwischen benachbarten Ecken und d_1 zwischen einer Ecke und der übernächsten. Außerdem muss die Diagonale d_2 , die im 10-Eck zwei Ecken überspringt und die Länge $\tau + 2(\tau \cos \frac{\pi}{5}) = \tau + 2\tau(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau) = \tau + \tau(1 + \tau) = 2\tau + \tau^2 = 2\tau + 1 - \tau = \tau + 1$ hat, in der Eckenmenge e_0 bis e_9 entsprechend vorkommen.

Zu diesen zehn Ecken müssen wir schließlich ein zweites 10-Eck finden, dass die gleichen Eigenschaften hat und senkrecht zum ersten steht. Wir finden insgesamt die Punkte

$$\begin{aligned}e_0 &= (1, 0, 0, 0), & f_0 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_1 &= (\frac{1}{2\tau}, -\frac{\tau}{2}, -\frac{1}{2}, 0), & f_1 &= (0, \frac{1}{2}, -\frac{\tau}{2}, \frac{1}{2\tau}), \\ e_2 &= (\frac{\tau}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\tau}, 0), & f_2 &= (0, \frac{1}{2\tau}, -\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}), \\ e_3 &= (-\frac{\tau}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\tau}, 0), & f_3 &= (0, \frac{1}{2\tau}, -\frac{1}{2}, -\frac{\tau}{2}), \\ e_4 &= (-\frac{1}{2\tau}, -\frac{\tau}{2}, -\frac{1}{2}, 0), & f_4 &= (0, \frac{1}{2}, -\frac{\tau}{2}, -\frac{1}{2\tau}), \\ e_5 &= (-1, 0, 0, 0), & f_5 &= (0, 0, 0, -1), \\ e_6 &= (-\frac{1}{2\tau}, \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}, 0), & f_6 &= (0, -\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, -\frac{1}{2\tau}), \\ e_7 &= (-\frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\tau}, 0), & f_7 &= (0, -\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2}, -\frac{\tau}{2}), \\ e_8 &= (\frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\tau}, 0), & f_8 &= (0, -\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}), \\ e_9 &= (\frac{1}{2\tau}, \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}, 0), & f_9 &= (0, -\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2\tau}).\end{aligned}$$

Dabei wird das erste 10-Eck (e_0 bis e_9) durch $(1, 0, 0, 0)$ und $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\tau}, 0)$ und das zweite (f_0 bis f_9) durch $(0, 0, 0, 1)$ und $(0, -\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2}, 0)$ aufgespannt. Man sieht sofort, dass all diese Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Bleibt nur noch zu zeigen, dass das Polychor, das entsteht, wenn wir die gefundenen 20 Ecken mitsamt der angrenzenden Zellen aus dem C_{600} entfernen, auch noch eckentransitiv ist, also mit dem $s\{5 \times 5\}$ von Conway und Guy übereinstimmt. Es stellt sich also die Frage, ob es Ecken gibt, die nicht an einem 5-Antiprisma (genauer sogar an zweien) liegen. Oder mit anderen Worten: Gibt es Ecken, die zu keinem der 20 gefundenen Ecken benachbart sind?

Eine Eigenschaft der zwei 10-Ecke wird uns dabei weiterhelfen: Die Entfernung zwischen jeder Ecke des einen 10-Ecks und einer beliebigen Ecke des zweiten 10-Ecks beträgt genau $\sqrt{2}$. Bewegen wir uns also auf der Oberfläche (eigentlich dem Oberraum!) des Polychors und nicht durch sein Inneres, dann besitzt es jeweils auf den beiden 10-Ecken (durch Drehsymmetrie in der Ebene) und durch die konstante und damit maximale Entfernung der

beiden 10-Ecke (durch Bewegung des einem Ringes auf den anderen) eine Transitivität der 5-Antiprismen; wir können jedes 5-Antiprisma in ein anderes überführen und bekommen deckungsgleiche Polychora vor und nach der Überführung. Das heißt aber auch, dass wir uns von einer gegebenen aus den zwanzig gefundenen Ecken nicht weiter als $\sqrt{2}$ entfernen müssen, um eine Ecke zu finden, die nicht an einem 5-Antiprisma liegt. Wäre das nämlich so, dann wäre die Entfernung zu einer anderen der zwanzig Ecken wieder kleiner als $\sqrt{2}$.

Nehmen wir uns zwei benachbarte Ecken des ersten 10-Ecks: $e_8 = (\frac{\tau}{2}, \frac{1}{2\tau}, 0)$ und $e_9 = (\frac{1}{2\tau}, \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Diese beiden repräsentieren nach Entfernen der zwanzig Ecken samt angrenzenden Zellen zwei benachbarte 5-Antiprismen. Durch die Antiprismentransitivität können wir o.B.d.A. eine Ecke des zwischen diesen beiden Antiprismen liegenden 5-Ecks F als einen Nachbarn eines der zwanzig Ecken nehmen. Diese Ecke, z.B. $g = (1, 1, 1, 1)$, ist dann auch Ecke des anderen 5-Antiprismas; damit sind die Entfernungen zwischen g und e_8 bzw. e_9 wieder gleich der Kantenlänge τ des C_{600} . Jetzt suchen wir einen Nachbarn von g , der weder Ecke eines der beiden 5-Antiprismen, die mit e_8 und e_9 korrespondieren, noch Nachbar eines der anderen Ecken aus den beiden 10-Ecken ist. Im C_{600} hat g 12 Nachbarn; hier fallen e_8, e_9 , zwei weitere Ecken im 5-Eck F (die zu g benachbarten) und je zwei benachbarte Ecken, die auf den beiden 5-Antiprismen auf den 5-Ecken gegenüber von F liegen, weg. Wir müssen folglich nur vier Nachbarecken zu g dahingehend überprüfen, ob deren Minimalabstand zu einem der zwanzig gefundenen Ecken größer als τ ist.

Nach ein wenig Rechnen bekommen wir die vier Ecken $(\frac{\tau}{2}, \frac{1}{2\tau}, 0, \frac{1}{2})$, $(\frac{\tau}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\tau})$, $(\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, 0, \frac{1}{2\tau})$ und $(0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2\tau})$ als Nachbarn von g , die nicht zu e_8 oder e_9 benachbart sind. Und nach weiterem Rechnen stellen wir fest, dass jede der vier Ecken zu zwei Ecken der beiden 10-Ecke benachbart sind (genauer sogar zu benachbarten Ecken; jede der vier Ecken liegt also auf einem 5-Eck zwischen zwei Antiprismen). Die erste Ecke hat zu $(0, \frac{1}{2}, -\frac{\tau}{2}, \frac{1}{2\tau})$ und zu $(0, \frac{1}{2\tau}, -\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2})$, die zweite zu $(0, 0, 0, 1)$ und zu $(0, -\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1}{2\tau})$, die dritte zu $(0, 0, 0, 1)$ und zu $(0, \frac{1}{2}, -\frac{\tau}{2}, \frac{1}{2\tau})$ und die vierte Ecke zu $(0, 0, 0, 1)$ und zu $(0, \frac{1}{2}, -\frac{\tau}{2}, \frac{1}{2\tau})$ die Entfernung τ (=Kantenlänge des C_{600}).

Damit ist gezeigt, dass durch das Entfernen der zwanzig Ecken, die die beiden senkrecht zueinander stehenden 10-Ecke darstellen, und aller an diesen grenzenden Zellen, aus dem C_{600} das Polychor $s\{5 \times 5\}$ von Conway und Guy entsteht und dass dieses über Eckentransitivität verfügt; an jeder Ecke treffen zwei $(3,3,3,5)$ und 12 $(3,3,3)$ zusammen. Folglich ist die Existenz unseres Polychors [# 23] gezeigt.

8.7 Zusammenfassung

In dieser Zusammenfassung werden noch einmal alle von uns im letzten Kapitel gefundenen 64 Polychora aufgezählt und deren wirkliche Existenz durch eines der erwähnten Verfahren sowie in der Literatur übliche Namen angegeben. Die kursiv gestellten, englischen Namen⁹ sind von Norman W. Johnson [13] bzw. George Olshevsky [17].

#	Existenz	Namen
1	C_5	5-Zeller, 4-Simplex, Pentachor, $\{3,3,3\}$
2	C_{16}	16-Zeller, Kreuzpolychor, Dekahexachor, $\{3,3,4\}$
3	ce_1C_5	<i>Rectified 5-cell</i>
4	$H(3,3,3)$	tetraedrisches Prismachor
5	$H(3,3,3,3)$	oktaedrisches Prismachor
6	C_8	8-Zeller, Tesserakt, Hyperwürfel, Oktachor, $\{4,3,3\}$
7	C_{24}	24-Zeller, Ikositetrachor, <i>Rectified 16-cell</i> , $\{3,4,3\}$
8	e_3C_5	<i>Runcinated 5-cell</i>
9	$H(3,3,3,3,3)$	ikosaedrisches Prismachor
10	$H(3,4,3,4)$	kubo-oktaedrisches Prismachor
11	e_2C_5	<i>Cantellated 5-cell</i>
12	ce_1C_8	<i>Rectified 8-cell</i>
13	e_1C_5	stumpfer 5-Zeller, <i>Truncated 5-cell</i>
14	$H(3,6,6)$	stumpfes tetraedrisches Prismachor
15	$ce_1e_2C_5$	<i>Bitruncated 5-cell</i> , stumpf-tetraedrisches Decachor
16	$H(3,3,3,3,4)$	schräges hexaedrisches Prismachor
17	e_3C_8	<i>Runcinated 8-cell</i>
18	$H(3,4,4,4)$	rhomben-kubo-oktaedrisches Prismachor
19	$H(5,5,5)$	dodekaedrisches Prismachor
20	e_1C_{16}	stumpfer 16-Zeller, <i>Truncated 16-cell</i>
21	$e_1e_3C_5$	<i>Runcitruncated 5-cell</i>
22	$s\{3,4,3\}$	schräger 24-Zeller, <i>Snub 24-cell</i>
23	$s\{5 \times 5\}$	großes Antiprismachor
24	C_{600}	600-Zeller, Hexakosiachor, $\{3,3,5\}$
25	$H(4,6,6)$	stumpfes oktaedrisches Prismachor
26	$H(3,5,3,5)$	ikosi-dodekaedrisches Prismachor
27	ce_1C_{24}	<i>Rectified 24-cell</i>
28	$e_1e_2C_5$	<i>Cantitruncated 5-cell</i>

⁹Dabei heißt truncated abgestumpft und rectified gestreckt. Des Weiteren kommt die Vorsilbe Canti- aus dem Englischen und bedeutet soviel wie schräg. Runci- hat wahrscheinlich seinen Ursprung im Lateinischen (runcina = Hobel). Cantellated bedeutet eine Abstumpfung der Kanten.

#	Existenz	Namen
29	$H(3, 8, 8)$	stumpfes hexaedrisches Prismachor
30	$e_2 C_8$	<i>Cantellated 8-cell</i>
31	$e_3 C_{24}$	<i>Runcinated 24-cell</i>
32	$ce_1 e_2 C_8$	<i>Bitruncated 8-cell, Runcicantic 8-cell</i>
33	$e_1 C_8$	stumpfer 8-Zeller, <i>Truncated 8-cell</i>
34	$H(3, 3, 3, 3, 5)$	schräges dodekaedrisches Prismachor
35	$e_1 e_2 e_3 C_5$	<i>Omnitruncated 5-cell</i>
36	$H(3, 4, 5, 4)$	rhomben-ikosi-dodekaedrisches Prismachor
37	$e_1 e_3 C_{16}$	<i>Runcitruncated 16-cell</i>
38	$H(4, 6, 8)$	großes rhomben-kubo-oktaedrisches Prismachor
39	$H(5, 6, 6)$	stumpfes ikosaedrisches Prismachor
40	$e_2 C_{24}$	<i>Cantellated 24-cell</i>
41	$e_1 e_3 C_8$	<i>Runcitruncated 8-cell</i>
42	$e_1 C_{24}$	stumpfer 24-Zeller, <i>Truncated 24-cell</i>
43	$e_1 e_2 C_8$	<i>Cantitruncated 8-cell</i>
44	$H(3, 10, 10)$	stumpfes dodekaedrisches Prismachor
45	$ce_1 C_{600}$	<i>Rectified 600-cell</i>
46	$ce_1 e_2 C_{24}$	<i>Bitruncated 24-cell</i> , stumpf-hex. Tetrakontaoktachor
47	$e_1 e_3 C_{24}$	<i>Runcitruncated 24-cell</i>
48	$e_1 e_2 e_3 C_8$	<i>Omnitruncated 8-cell</i>
49	C_{120}	120-Zeller, Hekatonikosachor, $\{5, 3, 3\}$
50	$H(4, 6, 10)$	großer rhomben-ikosi-dodekaedrisches Prismachor
51	$e_1 e_2 C_{24}$	<i>Cantitruncated 24-cell</i>
52	$ce_1 C_{120}$	<i>Rectified 120-cell</i>
53	$e_1 C_{600}$	stumpfer 600-Zeller, <i>Truncated 600-cell</i>
54	$e_1 e_2 e_3 C_{24}$	<i>Omnitruncated 24-cell</i>
55	$e_3 C_{120}$	<i>Runcinated 120-cell</i>
56	$e_2 C_{600}$	<i>Cantellated 600-cell</i>
57	$e_2 C_{120}$	<i>Cantellated 120-cell</i>
58	$ce_1 e_2 C_{120}$	<i>Bitruncated 120-cell</i>
59	$e_1 C_{120}$	stumpfer 120-Zeller, <i>Truncated 120-cell</i>
60	$e_1 e_3 C_{600}$	<i>Runcitruncated 600-cell</i>
61	$e_1 e_2 C_{600}$	<i>Cantitruncated 600-cell</i>
62	$e_1 e_3 C_{120}$	<i>Runcitruncated 120-cell</i>
63	$e_1 e_2 C_{120}$	<i>Cantitruncated 120-cell</i>
64	$e_1 e_2 e_3 C_{600}$	<i>Omnitruncated 600-cell</i>
	$H(3, 3, 3, p)$	p -antiprismatisches Prismachor ($p \geq 3$)
	$T(p, q)$	p, q -Biprismachor ($p, q \geq 3$)

Kapitel 9

Die Archimedischen Polychora

„Es ist wichtig darauf zu achten, dass die Bezeichnungen Entdeckungen erleichtern. In wundervoller Weise kann man so die Arbeit des Geistes reduzieren.“

Gottfried Wilhelm Leibniz

9.1 Abschluss

In Kapitel 7 haben wir alle möglichen uniformen Polychora gefunden und deren Existenz in Kapitel 8 bewiesen. Diese müssen wir nun wieder in kleinere Gruppen aufteilen, so wie die uniformen Polyeder in die Platonischen und Archimedischen Polyeder, die Prismen und Antiprismen aufgeteilt werden.

Unter den uniformen Polychora finden wir auch die regelmäßigen oder Platonischen Polychora. Die unendlichen Gruppen der antiprismatischen Prismachora und der Biprismachora haben wir bereits als Gruppe beschrieben. So bleibt die Frage, ob wir die restlichen Polychora als archimedische bezeichnen können.

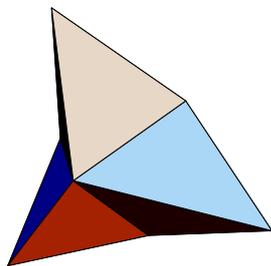
Wie in Kapitel 1 und 2 gesehen ist die Eigenschaft archimedisch schwer zu definieren. Daher gehen wir hier – wie z.B. seinerzeit auch Kepler – den Weg des Definierens durch Ausklammern. Für Archimedes waren die nach ihm benannten Polyeder kugelförmig und nicht flach wie die (Anti-)Prismen. Dieses übersetzte Kepler in die folgende Eigenschaft: Jeder Flächentyp, der bei einem der gesuchten Polyeder vorkommt, lässt sich mindestens dreimal finden. Damit werden Prismen und Antiprismen ausgeklammert, da bei ihnen zwei parallele n -Ecken vorliegen und die restlichen Flächen 3- oder 4-Ecke sind. Für die endgültige Definition hat Kepler schließlich noch die Platonischen Polyeder entfernt.

Für unsere uniformen Polychora heißt dies nun, dass wir von den 64 gefundenen Polychora – die antiprismatischen Prismachora und die Biprismachora sind schon ausgeklammert – neben den Platonischen Polychora noch diejenigen Polychora entfernen müssen, die aus zwei parallelen Zellen gleichen Typs und anderen Zellen mit Häufigkeiten größer als zwei bestehen. In die Eckenumgebungen übersetzt sind die letztgenannten Polychora genau diejenigen, deren Eckenumgebung aus einer beliebigen (uniformen) Zelle und ansonsten nur noch aus Prismen besteht. Dies sind die Polychora, die wir in Kapitel 8 durch prismatisches Hochziehen erhalten haben.

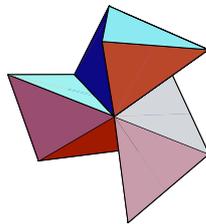
Damit können wir die restlichen 41 Polychora zusammenfassen zu den Archimedischen Polychora.

Im Folgenden sollen nun noch einmal die Abwicklungen der Eckenumgebungen der Platonischen Polychora, der Prismachora und der Archimedischen Polychora dargestellt werden.

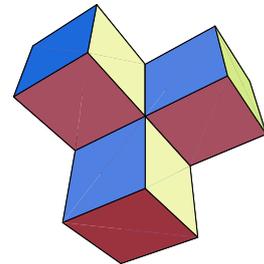
9.2 Eckenumgebungen der Platonischen Polychora



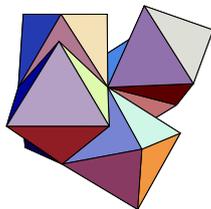
1
5-Zeller



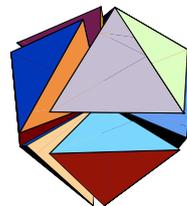
2
16-Zeller



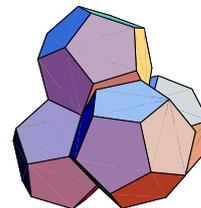
6
8-Zeller



7
24-Zeller

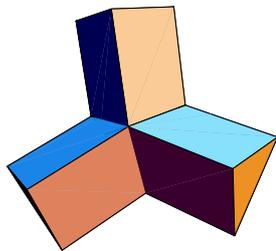


24
600-Zeller

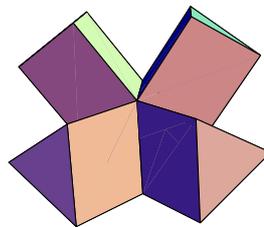


49
120-Zeller

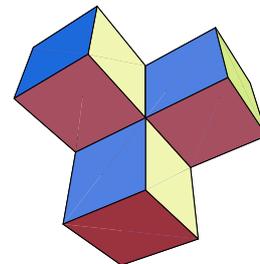
9.3 Eckenumgebungen der Prismachora



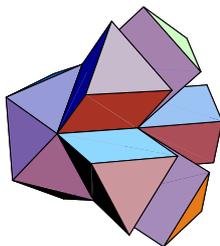
4
tetraedrisches
Prismachor



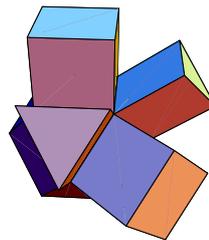
5
oktaedrisches
Prismachor



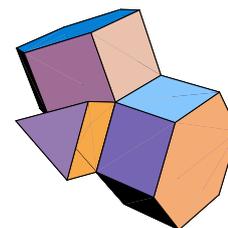
6
hexaedrisches
Prismachor (= 8-Zeller)



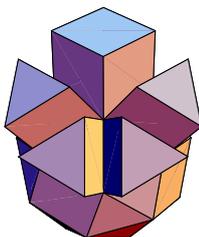
9
ikosaedrisches
Prismachor



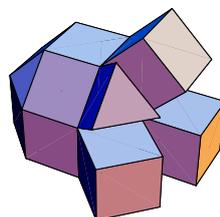
10
kubo-oktaedrisches
Prismachor



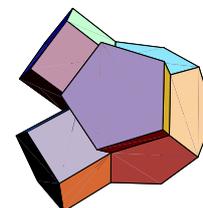
14
stumpfes tetra-
edrisches Prismachor



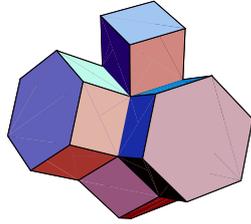
16
schräges hexa-
edrisches Prismachor



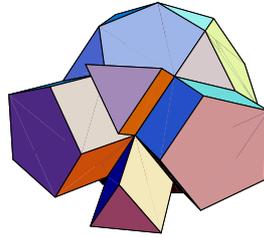
18
rhomben-kubo-
oktaedrisches Prismachor



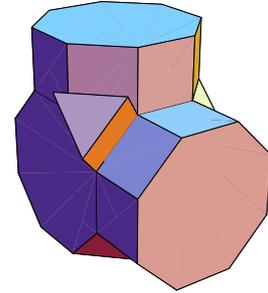
19
dodekaedrisches
Prismachor



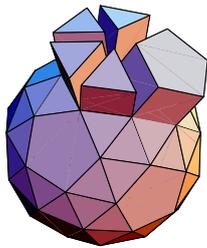
25
stumpfes okta-
edrisches Prismachor



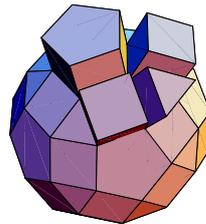
26
ikosi-dodeka-
edrisches Prismachor



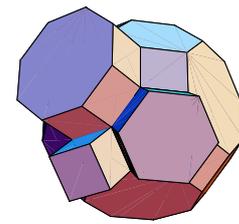
29
stumpfes hexa-
edrisches Prismachor



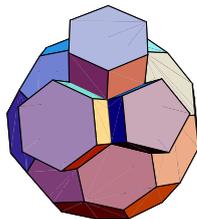
34
schräges dode-
kaedrisches Prismachor



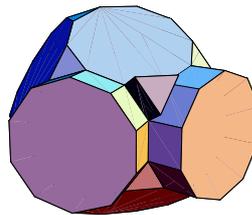
36
rhomben-ikosi-dode-
kaedrisches Prismachor



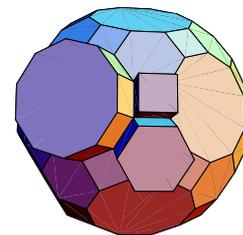
38
großes rhomben-kubo-
oktaedrisches Prismachor



39
stumpfes ikosa-
edrisches Prismachor

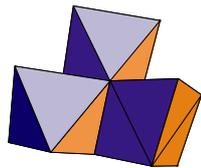


44
stumpfes dodeka-
edrisches Prismachor

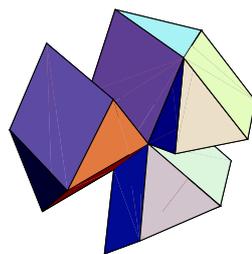


50
großes rhomben-ikosi-do-
dekaedrisches Prismachor

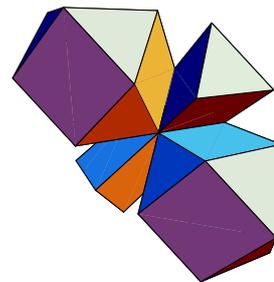
9.4 Eckenumgebungen der Archimedischen Polychora



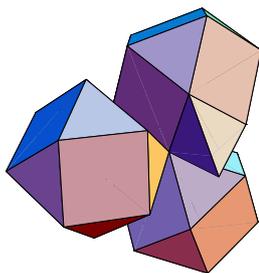
3
Rectified 5-cell



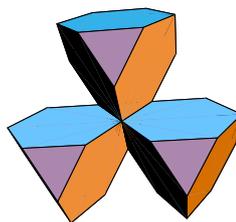
8
Runcinated 5-cell



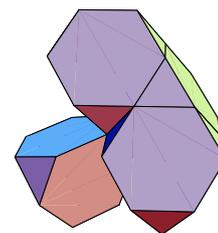
11
Cantellated 5-cell



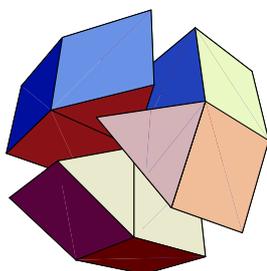
12
Rectified 8-cell



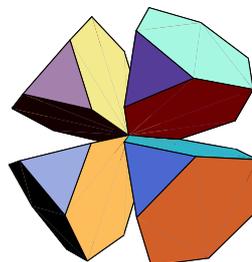
13
stumpfer 5-Zeller



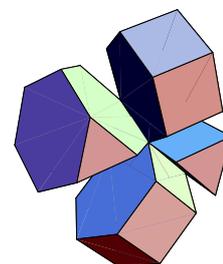
15
stumpf-tetraedrisches
Dekachor



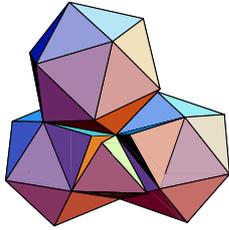
17
Runcinated 8-cell



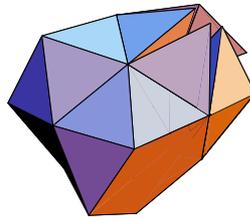
20
stumpfer 16-Zeller



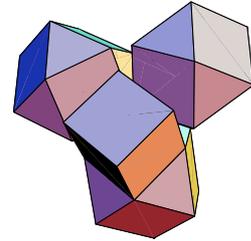
21
Runcitruncated 5-cell



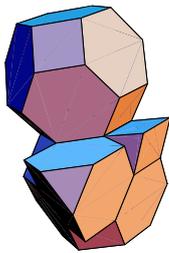
22
schräger 24-Zeller



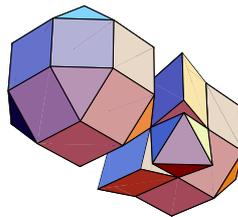
23
großes Antiprismachor



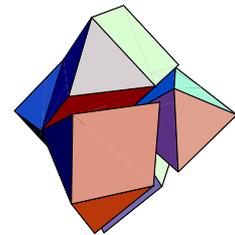
27
Rectified 24-cell



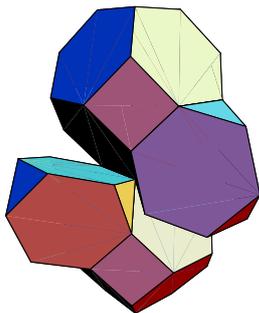
28
Cantitruncated 5-cell



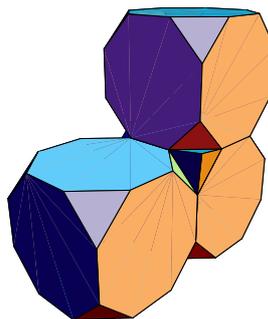
30
Cantellated 8-cell



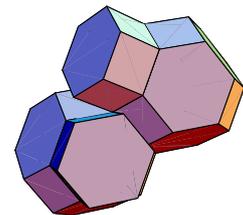
31
Runcinated 24-cell



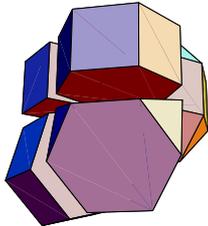
32
Runcicantic 8-cell



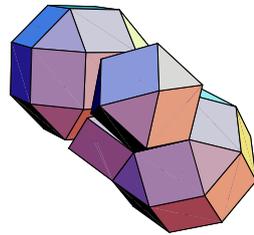
33
stumpfer 8-Zeller



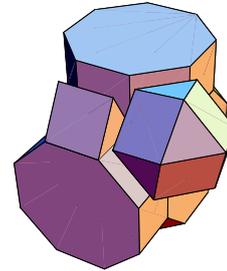
35
Omnitruncated 5-cell



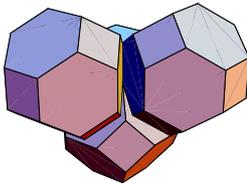
37
Runcitruncated 16-cell



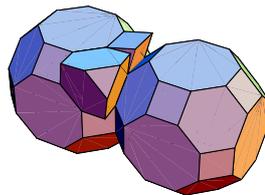
40
Cantellated 24-cell



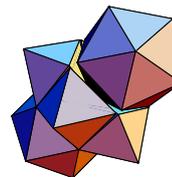
41
Runcitruncated 8-cell



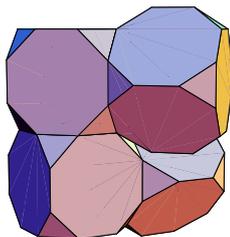
42
stumpfer 24-Zeller



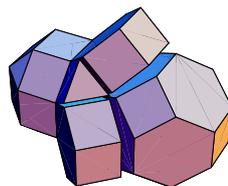
43
Cantitruncated 8-cell



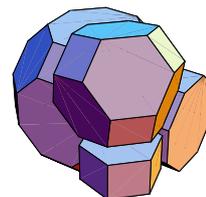
45
Rectified 600-cell



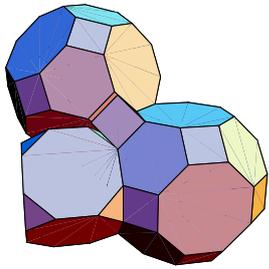
46
stumpf-hexaedrisches
Tetrakontaoktachor



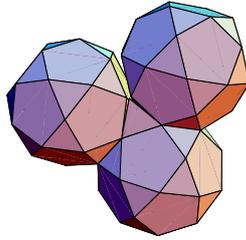
47
Runcitruncated 24-cell



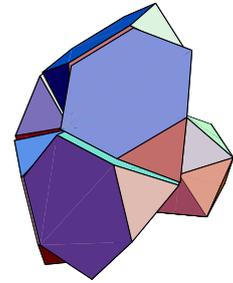
48
Rectified 8-cell



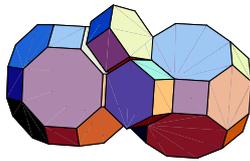
51
Cantitruncated 24-cell



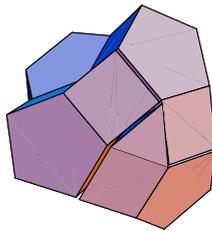
52
Rectified 120-cell



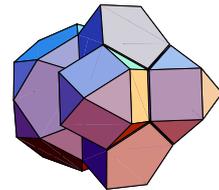
53
stumpfer 600-Zeller



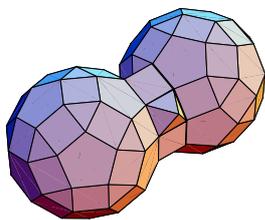
54
Omnitruncated 24-cell



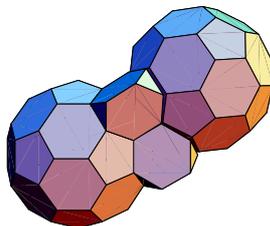
55
Runcinated 120-cell



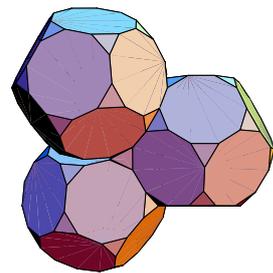
56
Cantellated 600-cell



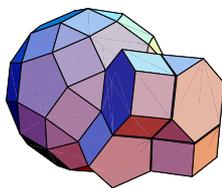
57
Cantellated 120-cell



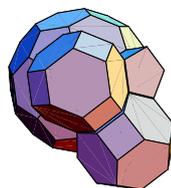
58
Bitruncated 120-cell



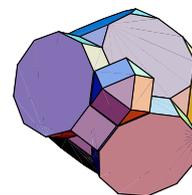
59
stumpfer 120-Zeller



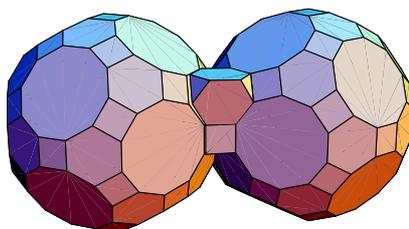
60

Runcitruncated 600-cell

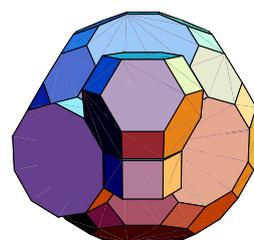
61

Cantitruncated 600-cell

62

Runcitruncated 120-cell

63

Cantitruncated 120-cell

64

Omnitruncated 600-cell

Die kursiv gestellten Namen stammen (wie auf Seite 113 schon erwähnt) von Norman W. Johnson und George Olshevsky.

9.5 Noch offene Fragen

Obwohl schon viele Arbeiten über die Archimedischen Polychora verfasst wurden, die deren Symmetrien und Zusammenhänge untereinander beschreiben, bleiben einige naheliegende Fragen offen. So ist es bis heute – nach meinem Wissensstand – keinem gelungen, die Archimedischen bzw. uniformen Polychora einheitlich und schnell durch eine Art Kurznotation darzustellen. Lediglich Abkürzungen wie TC_5 für den stumpfen 5-Zeller (engl. *truncated 5-cell*) sind gebräuchlich, lassen sich aber nicht mit dem wohlbekanntem Schläfli-Symbol für die regelmäßigen Polytope vergleichen. Bei letzteren lässt sich mit einer simplen Vorschrift aus dem Symbol das Polytop rekonstruieren,

wogegen die Abkürzungen von Autor zu Autor stark variieren. Einzig von W.A. Wythoff (Siehe Kapitel 1) wurde dies mit mäßigem Erfolg versucht: Mit seiner Wythoff-Kaleidoskop-Konstruktion (beschrieben z.B. in [6]) lassen sich fast alle uniformen Polychora darstellen – mit Ausnahme des großen Antiprismachors, der Prismachora zum schrägen Hexa- und Dodekaeder sowie des schrägen 24-Zellers. Dabei benutzt Wythoff Spiegelsymmetrien auf der vierdimensionalen Sphäre \mathfrak{S}_3 aus; ein in einem (unregelmäßigen) sphärischen Tetraeder befindlicher Punkt wird an allen Grenzflächen mit dem Tetraeder zusammen so lange gespiegelt, bis \mathfrak{S}_3 einmal vollständig bedeckt ist. Die erhaltene Menge der Spiegelpunkte ist unter gewissen Umständen identisch mit der Eckenmenge eines uniformen Polychors.

Coxeter konnte diese Konstruktion dahingehend erweitern, dass alle bis 1960 bekannten uniformen Polychora damit erzeugt werden konnten, indem er von den endlichen Spiegelgruppen eine rotierende Untergruppe betrachtete. Faktisch betrachtete er nicht mehr jeden Spiegelpunkt, sondern nur noch jeden zweiten. Als dann allerdings das große Antiprismachor gefunden wurde, schrieb Coxeter: „Die Existenz von Conways großem Antiprismachor deutet darauf hin, dass es in Räumen mit mehr als vier Dimensionen wahrscheinlich viele uniforme Polytope gibt, deren Symmetriegruppen nicht durch Reflexionen erzeugt werden. Deren Klassifikation wird für zukünftige Geometer eine interessante Herausforderung sein.“[9]

Arbeiten zu uniformen Polytopen mit Dimension größer als 4 gibt es zwar schon (z.B. von Gosset [11] oder Coxeter [9]), allerdings suchen diese nicht systematisch nach allen, sondern nur nach einigen mit besonderen Eigenschaften (Regelmäßigkeit der Zellen bei Gosset oder Erzeugung durch Reflexionen bei Coxeter). Über die regelmäßigen Polytope weiß man, dass es zwar in vier Dimensionen sechs, in höheren aber nur noch je drei gibt. Klammert man in den höheren Dimensionen alle Prismatope und die regelmäßigen Polytope aus, ist somit noch völlig offen, ob mit steigender Dimension die Zahl der Archimedischen Polytope auch wächst, oder ob es eine obere Grenze oder sogar immer weniger gibt.

Weitere interessante Fragen beschäftigen sich mit den dualen Polychora: Die Dualen zu den Archimedischen Polyedern – welche über Eckentransitivität verfügen – sind die sogenannten Catalanischen Polyeder, die per Definition Flächentransitivität besitzen. Die Dualen zu den Archimedischen Polychora besitzen somit per Definition Zelltransitivität; eine Charakterisierung dieser Polychora wurde meines Wissens ebenfalls noch nicht veröffentlicht.

Eine weitere Verallgemeinerung der Archimedischen Polychora wäre die Untersuchung der konvexen Polychora mit regelmäßigen Flächen. In [10] wird

die Anzahl der konvexen Polyeder mit regelmäßigen Flächen mit 111 angegeben (leider ohne Beweis). Wie sieht es im 4-Dimensionalen aus?

Und letztendlich stellt sich die Frage, ob die Grundlagenforschung in diesem Gebiet der Geometrie nicht eines Tages unerwartet Anwendung in z.B. der Loop-Quantengravitation findet. Zur Zeit gibt es Arbeitsgruppen in der Theoretischen Physik, die versuchen, die höherdimensionale Raumzeit zu diskretisieren. Dabei treten zwangsläufig höherdimensionale Polytope auf, deren Faltwinkel die Raumzeit-Krümmung und deren Volumina die Quanten- und Energiezustände definieren ([22], [23]).

Anhang A

Tabellen

„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.“

Leopold Kronecker

A.1 Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_ϵ
1			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	0.7905694150421
2			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	0.8660254037844
3			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	1.0744805708748
4			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	∞
5			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	nicht existent
6			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	nicht existent
7			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	nicht existent
8			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	nicht existent
9			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	nicht existent
10			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	nicht existent
11			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 12)	nicht existent
12			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 13)	nicht existent
13			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 14)	nicht existent
14			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	0.8164965809277
15			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	0.8545454093319
16			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.0000000000000
17			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.6236716667998
18			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4, 4)	1.8477590650226
19			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 5, 4)	nicht existent
20			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	0.9128709291753
21			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	1.0000000000000
22			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	1.1180339887499
23			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	1.2741623922635
24			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.4856334612503
25			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 8)	1.4856334612503
26			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 9)	1.7904572220260
27			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 10)	2.2882456112707
28			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 11)	3.3740249770952
29			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 12)	∞
30			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 13)	nicht existent
31			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 14)	nicht existent
32			(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	1.0280759364382
33			(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4, 3)	5.2360679774998
34			(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.1547005383793
35			(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	1.6124515496597
36			(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 8)	3.4989485116416
37			(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 10)	nicht existent
38			(4, 4, 3)	(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	1.2889214913791
39			(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	1.4284397482988
40			(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(4, 8, 6)	2.6131259297528
41			(4, 4, 3)	(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	1.5717796842868

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
42			(4, 4, 3)	(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	1.7179544004668
43			(4, 4, 3)	(4, 10, 4)	(4, 10, 6)	9.7446101783240
44			(4, 4, 3)	(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	1.8662823274137
45			(4, 4, 3)	(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	2.0162797774372
46			(4, 4, 3)	(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	2.1675952358107
47			(4, 4, 3)	(4, 14, 4)	(4, 14, 4)	2.3199678172026
48			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	0.8948229778808
49			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.0283350293622
50			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.3452992222899
51			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	1.4047245793927
52			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	2.9230515883353
53			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	1.0744805708748
54			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	1.1739315546221
55			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 7)	1.2879915926397
56			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3, 4)	1.4133917348805
57			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 8)	1.4133917348805
58			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 9)	1.5487434512203
59			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 10)	1.6935270853311
60			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 11)	1.8477689904598
61			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 12)	2.0119136989192
62			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 13)	2.1867781085728
63			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 14)	2.3735541081632
64			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 6)	1.2747548783982
65			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 7)	1.3925680394810
66			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 3, 4)	1.5200855004131
67			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 8)	1.5200855804131
68			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 9)	1.6540528266993
69			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 10)	1.7926308854760
70			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 11)	1.9346505606249
71			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 12)	2.0793165123461
72			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 13)	2.2260635151980
73			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 14)	2.3744770595850
74			(4, 4, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6, 6)	1.8439088914586
75			(4, 4, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6, 8)	2.5653843882515
76			(4, 4, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6, 10)	4.1799684155505
77			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.1832159566199
78			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.5256334323896
79			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 4, 4)	1.5828897211988
80			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 5, 4)	2.4972120409568
81			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 7)	1.5244586697612
82			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 3, 4)	1.6712999582125
83			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 8)	1.6712999582125
84			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 9)	1.8285933382416
85			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 10)	1.9942495712871
86			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 11)	2.1672190850281
87			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 12)	2.3470061074185
88			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 13)	2.5334564988851
89			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 14)	2.7266529805352
90			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.8477590650226
91			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 8)	1.8477590650226
92			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 9)	2.0443310566329
93			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 10)	2.2600389869704
94			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 11)	2.4959132240311
95			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 12)	2.7544391566384
96			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 13)	3.0395458674220
97			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 14)	3.3569185891987
98			(4, 4, 3)	(4, 8, 6)	(4, 8, 6)	3.0059164835259
99			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 8)	1.8477590650226
100			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 9)	2.0443310566329
101			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 10)	2.2600389869704
102			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 11)	2.4959132240311
103			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 12)	2.7544391566384
104			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 13)	3.0395458674220
105			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 14)	3.3569185891987
106			(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	(4, 4, 9)	2.2974881732558
107			(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	(4, 4, 10)	2.5922789997394
108			(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	(4, 4, 11)	2.9388752603183
109			(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	(4, 4, 12)	3.3551333007487
110			(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	(4, 4, 13)	3.8719444254389
111			(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	(4, 4, 14)	4.5463228637087
112			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.2535251879095
113			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	2.4148861690271
114			(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	(4, 4, 10)	3.0112501486612
115			(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	(4, 4, 11)	3.5607732600372
116			(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	(4, 4, 12)	4.3356661142053
117			(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	(4, 4, 13)	5.5824656754535
118			(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	(4, 4, 14)	8.2755734614735
119			(4, 4, 3)	(3, 4, 4, 4)	(3, 4, 4, 4)	2.6131259297528
120			(4, 4, 3)	(4, 6, 8)	(4, 6, 8)	4.2994512875760
121			(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	(4, 4, 11)	4.5321391717300
122			(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	(4, 4, 12)	6.4589364737097
123			(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	(4, 4, 13)	16.6057375885695

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
124			(4, 4, 3)	(4, 5, 4, 3)	(4, 5, 4, 3)	6.7350337619791
125			(4, 4, 3)	(4, 10, 6)	(4, 10, 6)	11.2521066192067
126			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	0.6324555320337
127			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	0.7071067811865
128			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	0.8794652240646
129			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6180339887499
130			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6180339887499
131			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	nicht existent
132			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	nicht existent
133			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	nicht existent
134			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	nicht existent
135			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	nicht existent
136			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 10)	nicht existent
137			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 11)	nicht existent
138			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 12)	nicht existent
139			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	nicht existent
140			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	nicht existent
141			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	nicht existent
142			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	0.7905694150421
143			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	0.8368950163968
144			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.0000000000000
145			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.4057619266345
146			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4, 4)	1.4856334612503
147			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 5, 4)	5.2360679774998
148			(3, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	2.3085869096904
149			(3, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	2.1553877590020
150			(3, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	2.0031202459493
151			(3, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	1.8520153229578
152			(3, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	1.7023845272343
153			(3, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 10)	3.0536251376065
154			(3, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	1.5546569762232
155			(3, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	1.4094376878690
156			(3, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 8)	1.7791615995435
157			(3, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	1.2676021023674
158			(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	1.1304540227832
159			(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	1.1998999434206
160			(3, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	1.0000000000000
161			(3, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 5)	1.6180339887499
162			(3, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3, 3)	2.1818181369929
163			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	0.8794652240646
164			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.0317836260834
165			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.3516822182379
166			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	1.4047245793927
167			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	2.2486533399101
168			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	0.7745966692415
169			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	0.8794652240646
170			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.0000000000000
171			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.0000000000000
172			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	1.1304540227832
173			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	1.2676021023674
174			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	1.3783989547414
175			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	1.4094376878690
176			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	1.5546569762232
177			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 10)	1.7023845272343
178			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 11)	1.8520153229578
179			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 12)	2.0031202459493
180			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	2.1553877590020
181			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	2.1775242112341
182			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	2.3085869096904
183			(3, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	1.2649110640674
184			(3, 3, 3)	(3, 8, 8)	(3, 8, 8)	2.1497256437880
185			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.2247448713916
186			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.6988629556124
187			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 4, 4)	1.7854054561113
188			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 5, 4)	3.8351276292321
189			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 4)	1.0317836260834
190			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.2297911042740
191			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 5)	1.2297911042740
192			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 6)	1.4759894490559
193			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 7)	1.7873830995918
194			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.1002009374032
195			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 8)	2.2019299228077
196			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 9)	2.8089206080726
197			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 10)	3.8812778265187
198			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 11)	7.1240837963332
199			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6180339887499
200			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6180339887499
201			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.3703620934354
202			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	5.6979317307779
203			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	(3, 3, 3, 5)	1.6180339887499
204			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	(3, 3, 3, 6)	2.3703620934354
205			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	(3, 3, 3, 7)	5.6979317307779

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
206			(3, 3, 3)	(3,10,10)	(3,10,10)	8.2183343605926
207			(3, 3, 3)	(3, 5, 3, 5)	(3, 5, 3, 5)	4.5345678844570
208			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	4.0923274785571
209			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	5.7972326672579
210			(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	1.2649110640674
211			(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 4)	1.5811388300842
212			(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 5)	4.6435230050845
213			(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.2747548783982
214			(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	1.6124515496597
215			(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 8)	2.3709323785295
216			(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6,10)	8.2789503961853
217			(6, 6, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	1.2742336201788
218			(6, 6, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	1.3374135989270
219			(6, 6, 3)	(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	1.4142135623731
220			(6, 6, 3)	(6, 6, 4)	(6, 6, 4)	1.8439088914586
221			(6, 6, 3)	(6, 6, 4)	(6, 6, 5)	2.6457513110646
222			(6, 6, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6, 6)	2.1213203435596
223			(6, 6, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6, 8)	3.1648222331528
224			(6, 6, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6,10)	6.8819096023559
225			(6, 6, 3)	(6, 8, 4)	(6, 8, 4)	3.0059164835259
226			(6, 6, 3)	(6, 6, 5)	(6, 6, 5)	4.6435230050845
227			(6, 6, 3)	(5, 6, 6)	(5, 6, 6)	7.5796338776189
228			(6, 6, 3)	(6,10, 4)	(6,10, 4)	11.2521066192067
229			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	0.9128709291753
230			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	1.0280759364382
231			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	0.8660254037844
232			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 6)	1.1547005383793
233			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 4)	0.9626924198812
234			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 7)	1.2889214913791
235			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.4284397482988
236			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 8)	1.4284397482988
237			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.0744805708748
238			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 5)	1.0744805708748
239			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 9)	1.5717796842868
240			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4,10)	1.7179544004668
241			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 6)	1.1970850854857
242			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4,11)	1.8662823274137
243			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4,12)	2.0162797774372
244			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 7)	1.3274898624399
245			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4,13)	2.1675952358107
246			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3, 4)	1.4337243914993
247			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 8)	1.4636030534499
248			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4,14)	2.3199678172026
249			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 9)	1.6039684667553
250			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3,10)	1.7475600524206
251			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3,11)	1.8936431500996
252			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3,12)	2.0416825252255
253			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3,13)	2.1912814325983
254			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3, 5)	2.2130600506867
255			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3,14)	2.3421408775009
256			(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	0.9626924198812
257			(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.1180339887499
258			(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.4337243914993
259			(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 4, 4)	1.4856334612503
260			(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 5, 4)	2.2882456112707
261			(3, 4, 4)	(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	1.0744805708748
262			(3, 4, 4)	(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 5)	1.6935270853311
263			(3, 4, 4)	(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3, 3)	2.2130600506867
264			(3, 4, 4)	(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	1.1970850854857
265			(3, 4, 4)	(4, 6, 4)	(3, 6, 6)	1.2747548783982
266			(3, 4, 4)	(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	1.3274898624399
267			(3, 4, 4)	(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	1.4636030534499
268			(3, 4, 4)	(4, 8, 4)	(3, 8, 8)	1.8477590650226
269			(3, 4, 4)	(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	1.6039684667553
270			(3, 4, 4)	(4,10, 4)	(3,10, 3, 3)	1.7475600524206
271			(3, 4, 4)	(4,10, 4)	(3,10,10)	3.0112501486612
272			(3, 4, 4)	(4,11, 4)	(3,11, 3, 3)	1.8936431500996
273			(3, 4, 4)	(4,12, 4)	(3,12, 3, 3)	2.0416825252255
274			(3, 4, 4)	(4,13, 4)	(3,13, 3, 3)	2.1912814325983
275			(3, 4, 4)	(4,14, 4)	(3,14, 3, 3)	2.3421408775009
276			(3, 4, 4)	(3,10, 3, 3)	(4,10, 6)	3.9200106572748
277			(3, 4, 4)	(3, 8, 3, 3)	(4, 8, 6)	2.4086196502713
278			(3, 4, 4)	(3, 6, 3, 3)	(4, 6, 6)	1.6796925924246
279			(3, 4, 4)	(3, 6, 3, 3)	(4, 6, 8)	2.4911339993545
280			(3, 4, 4)	(3, 6, 3, 3)	(4, 6,10)	4.3524093264436
281			(3, 4, 4)	(3, 5, 3, 3)	(4, 5, 4, 3)	2.4972120409568
282			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 5)	1.0959855872742
283			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	0.9430407487778
284			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 6)	1.2456297057804
285			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.0865776768169
286			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 7)	1.4083579967203
287			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 3, 4)	1.5828897211988

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
288			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 8)	1.5828897211988
289			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.2597328151595
290			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.2597328151595
291			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 9)	1.7690528347569
292			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 10)	1.9674433999352
293			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	1.4616519166352
294			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 11)	2.1792951484760
295			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 12)	2.4064664432462
296			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	1.6953540714636
297			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 13)	2.6515160741604
298			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	1.9050956844255
299			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	1.9679680537909
300			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 14)	2.9178695011618
301			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	2.2923194341791
302			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 10)	2.6908523254729
303			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 11)	3.2050684011596
304			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 12)	3.9212492207810
305			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	5.0597194323143
306			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	5.2904045789883
307			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	7.4716542720927
308			(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	(3, 4, 3, 4)	1.3281310261041
309			(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.8754048211044
310			(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	(3, 4, 4, 4)	1.9787054780462
311			(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	(3, 4, 5, 4)	5.2360679774998
312			(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.1832159566199
313			(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.7405705750130
314			(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	1.8477590650226
315			(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	6.7350337619791
316			(3, 4, 4)	(3, 6, 6)	(4, 6, 6)	1.8439088914586
317			(3, 4, 4)	(3, 6, 6)	(4, 6, 8)	3.0059164835259
318			(3, 4, 4)	(3, 6, 6)	(4, 6, 10)	11.2521066192067
319			(3, 4, 4)	(4, 4, 6)	(3, 4, 3, 4)	1.6124515496597
320			(3, 4, 4)	(4, 4, 6)	(3, 4, 3, 3, 3)	3.0219124213533
321			(3, 4, 4)	(4, 4, 6)	(3, 4, 4, 4)	3.4989485116416
322			(3, 4, 4)	(3, 8, 8)	(4, 8, 6)	4.2994512875760
323			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 3, 3, 4)	1.5828897211988
324			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(4, 4, 7)	2.0069186467091
325			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(4, 4, 3, 4)	2.6131259297528
326			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(4, 4, 8)	2.6131259297528
327			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.4972120409568
328			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 3, 3, 5)	2.4972120409568
329			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(4, 4, 9)	3.7925682137340
330			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(4, 4, 10)	9.7446101783240
331			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	1.0000000000000
332			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	1.1061676173844
333			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	1.2247448713916
334			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	1.3520300579520
335			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.4856334612503
336			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 8)	1.4856334612503
337			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 9)	1.6239328935037
338			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 10)	1.7657955682213
339			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 11)	1.9104126235668
340			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 12)	2.0571948880864
341			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 13)	2.2057052779045
342			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 14)	2.3556140047814
343			(4, 4, 4)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	1.1061676173844
344			(4, 4, 4)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4, 3)	2.2882456112707
345			(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.2247448713916
346			(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	1.6583123951777
347			(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	(4, 6, 8)	2.3709323785295
348			(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	(4, 6, 10)	3.8351276292321
349			(4, 4, 4)	(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	1.3520300579520
350			(4, 4, 4)	(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	1.4856334612503
351			(4, 4, 4)	(4, 8, 4)	(4, 8, 6)	2.3709323785295
352			(4, 4, 4)	(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	1.6239328935037
353			(4, 4, 4)	(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	1.7657955682213
354			(4, 4, 4)	(4, 10, 4)	(4, 10, 6)	3.8351276292321
355			(4, 4, 4)	(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	1.9104126235668
356			(4, 4, 4)	(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	2.0571948880864
357			(4, 4, 4)	(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	2.2057052779045
358			(4, 4, 4)	(4, 14, 4)	(4, 14, 4)	2.3556140047814
359			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.0317836260834
360			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.2437516475077
361			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.6987933095147
362			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	1.7788236456639
363			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	3.4169299300339
364			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	1.2486060204784
365			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	1.4142135623731
366			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 7)	1.6000628928598
367			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3, 4)	1.8061441787369
368			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 8)	1.8061441787369
369			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 9)	2.0343275518360

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
370			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 10)	2.2882456112707
371			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 11)	2.5736212823916
372			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 12)	2.8990706197284
373			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 13)	3.2776643282270
374			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 14)	2.7299587242784
375			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 6)	1.6583123951777
376			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 7)	1.9673508598052
377			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 3, 4)	2.3709323785295
378			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 8)	2.3709323785295
379			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 9)	2.9355086768250
380			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 10)	3.8351276292321
381			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 11)	5.7577889539464
382			(4, 4, 4)	(4, 6, 6)	(4, 6, 6)	2.6457513110646
383			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.7320508075689
384			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	5.7874250218476
385			(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	(4, 4, 7)	2.5342468588086
386			(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	(4, 4, 3, 4)	3.5992881444312
387			(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	(4, 4, 8)	3.5992881444312
388			(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	(4, 4, 9)	7.6919252468704
389			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 5)	1.2030019100151
390			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(5, 5, 5)	1.4877921533475
391			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 6)	1.3128620634895
392			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 7)	1.4323379752543
393			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.5590745905621
394			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 8)	1.5590745905621
395			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 9)	1.6913795672034
396			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 10)	1.8280155323464
397			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 11)	1.9680658500247
398			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 12)	2.1108428660890
399			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 13)	2.2558241444594
400			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 14)	2.4026077784924
401			(4, 5, 4)	(4, 6, 4)	(5, 6, 6)	2.5279589543122
402			(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.1365469837747
403			(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.3281310261041
404			(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.7358599865523
405			(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	1.8061441787369
406			(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	3.0776835371753
407			(4, 5, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 5, 3, 5)	1.9757970370024
408			(4, 5, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 5, 3, 3, 3)	2.8157044444730
409			(4, 5, 4)	(4, 4, 5)	(4, 5, 4, 3)	3.0776835371753
410			(4, 5, 4)	(5, 5, 5)	(4, 5, 4, 3)	5.2360679774998
411			(4, 5, 4)	(4, 4, 6)	(4, 5, 4, 3)	8.2789503961853
412			(4, 5, 4)	(4, 6, 6)	(5, 6, 6)	9.1241012486160
413			(4, 5, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 5, 3, 5)	6.0735939788562
414			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	1.3128620634895
415			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(6, 6, 4)	1.6583123951777
416			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 6)	1.4142135623731
417			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 7)	1.5257736652616
418			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.6453287760161
419			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 8)	1.6453287760161
420			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(6, 6, 5)	2.5279589543122
421			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 9)	1.7712024284658
422			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 10)	1.9021130325903
423			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 11)	2.0370754508077
424			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 12)	2.1753277471611
425			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 13)	2.3162762730244
426			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 14)	2.4594546833642
427			(4, 6, 4)	(4, 8, 4)	(6, 8, 4)	2.3709323785295
428			(4, 6, 4)	(4, 10, 4)	(6, 10, 4)	3.8351276292321
429			(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.2529812470232
430			(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.4273174361375
431			(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.8014916055634
432			(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	1.8658457801852
433			(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	2.9844187466970
434			(4, 6, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 6, 6)	1.3542484191547
435			(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	(4, 6, 6)	1.8930378060148
436			(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	(4, 6, 8)	3.0075039974212
437			(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	(4, 6, 10)	8.2789503961853
438			(4, 6, 4)	(3, 6, 6)	(3, 4, 3, 4)	1.6124515496597
439			(4, 6, 4)	(3, 6, 6)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.2459694766195
440			(4, 6, 4)	(3, 6, 6)	(3, 4, 4, 4)	2.3709323785295
441			(4, 6, 4)	(3, 6, 6)	(3, 4, 5, 4)	8.2789503961853
442			(4, 6, 4)	(6, 6, 4)	(4, 6, 6)	2.2360679774998
443			(4, 6, 4)	(6, 6, 4)	(4, 6, 8)	3.4989485116416
444			(4, 6, 4)	(6, 6, 4)	(4, 6, 10)	12.7866511327240
445			(4, 6, 4)	(4, 4, 6)	(4, 6, 6)	2.2360679774998
446			(4, 6, 4)	(4, 4, 6)	(4, 6, 8)	5.1699054209297
447			(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	(4, 4, 7)	2.7278379770077
448			(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	(4, 4, 3, 4)	3.4989485116416
449			(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	(4, 4, 8)	3.4989485116416
450			(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	(6, 6, 5)	5.5151072396644
451			(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	(4, 4, 9)	5.0206097151088

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
452			(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	(4, 4, 10)	12.7866511327240
453			(4, 6, 4)	(6, 8, 4)	(4, 8, 6)	5.1699054209297
454			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 5)	1.4323379752543
455			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 6)	1.5257736652616
456			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 7)	1.6297148692981
457			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.7421515602244
458			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 8)	1.7421515602244
459			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 9)	1.8614895434057
460			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 10)	1.9864589767613
461			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 11)	2.1160485981869
462			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 12)	2.2494523967345
463			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 13)	2.3860262049235
464			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 14)	2.5252529808176
465			(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.3780485284423
466			(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.5373682481086
467			(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.8838666207530
468			(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	1.9436999186104
469			(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	2.9704429770281
470			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(8, 8, 3)	1.8477590650226
471			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 5)	1.5590745905621
472			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 6)	1.6453287760161
473			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 7)	1.7421515602244
474			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.8477590650226
475			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 8)	1.8477590650226
476			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 9)	1.9606796841376
477			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 10)	2.0796972784366
478			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 11)	2.2038110566629
479			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 12)	2.3322001605256
480			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 13)	2.4641920692516
481			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 14)	2.5992352953722
482			(4, 8, 4)	(8, 8, 3)	(4, 8, 6)	2.6131259297528
483			(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.5095764889788
484			(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.6557657380576
485			(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.9781448879832
486			(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	2.0341635103229
487			(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	2.9943013877480
488			(4, 8, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 8, 8)	1.9902592100154
489			(4, 8, 4)	(4, 4, 5)	(4, 8, 6)	2.7530644020744
490			(4, 8, 4)	(4, 4, 6)	(4, 8, 6)	3.4989485116416
491			(4, 8, 4)	(3, 8, 8)	(3, 4, 3, 4)	2.6131259297528
492			(4, 8, 4)	(3, 8, 8)	(3, 4, 3, 3, 3)	8.2340994272626
493			(4, 8, 4)	(4, 6, 6)	(6, 8, 4)	3.4989485116416
494			(4, 8, 4)	(4, 4, 7)	(4, 8, 6)	5.1848401619278
495			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 5)	1.6913795672034
496			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 6)	1.7712024284658
497			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 7)	1.8614895434057
498			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.9606796841376
499			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 8)	1.9606796841376
500			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 9)	2.0674419182184
501			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 10)	2.1806402801364
502			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 11)	2.2993117306895
503			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 12)	2.4226450111752
504			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 13)	2.5499595713617
505			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 14)	2.6806856179205
506			(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.6460055359316
507			(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.7807038172341
508			(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.0816249836270
509			(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	2.1342755088937
510			(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	3.0406128553468
511			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 5)	1.8280155323464
512			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(10, 10, 3)	3.0112501486612
513			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 6)	1.9021130325903
514			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 7)	1.9864589767613
515			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 3, 4)	2.0796972784366
516			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 8)	2.0796972884366
517			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 9)	2.1806402801364
518			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 10)	2.2882456112707
519			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 11)	2.4016057921801
520			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 12)	2.5199374588110
521			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 13)	2.6425687808883
522			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 14)	2.7689260243409
523			(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.7862076179023
524			(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.9108345330172
525			(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.1925081003689
526			(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	2.2421238339022
527			(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	3.1022333689989
528			(4, 10, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 10, 10)	3.3783801665753
529			(4, 10, 4)	(4, 4, 5)	(4, 10, 6)	4.9173509014000
530			(4, 10, 4)	(10, 10, 3)	(4, 10, 6)	9.7446101783240
531			(4, 10, 4)	(4, 4, 6)	(4, 10, 6)	12.7866511327240
532			(4, 10, 4)	(4, 6, 6)	(6, 10, 4)	12.7866511327240
533			(4, 10, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 10, 10)	9.7446101783240

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
534			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,5)	1.9680658500247
535			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,6)	2.0370754508077
536			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,7)	2.1160485981869
537			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,3,4)	2.2038110566629
538			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,8)	2.2038110566629
539			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,9)	2.2993117306895
540			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,10)	2.4016057921801
541			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,11)	2.5098511478904
542			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,12)	2.6233046334446
543			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,13)	2.7413157726280
544			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,14)	2.8633186570491
545			(4,11,4)	(3,11,3,3)	(3,4,3,3)	1.9293587269667
546			(4,11,4)	(3,11,3,3)	(3,4,3,4)	2.0451336799537
547			(4,11,4)	(3,11,3,3)	(3,4,3,3,3)	2.3094764858686
548			(4,11,4)	(3,11,3,3)	(3,4,4,4)	2.3563323141838
549			(4,11,4)	(3,11,3,3)	(3,4,5,4)	3.1752881655088
550			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,5)	2.1108428660890
551			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,6)	2.1753277471611
552			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,7)	2.2494523967345
553			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,3,4)	2.3322001605256
554			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,8)	2.3322001605256
555			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,9)	2.4226450111752
556			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,10)	2.5199374588110
557			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,11)	2.6233046334446
558			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,12)	2.7320508075689
559			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,13)	2.8455555838087
560			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,14)	2.9632698404113
561			(4,12,4)	(3,12,3,3)	(3,4,3,3)	2.0748439845282
562			(4,12,4)	(3,12,3,3)	(3,4,3,4)	2.1828138278598
563			(4,12,4)	(3,12,3,3)	(3,4,3,3,3)	2.4315143057561
564			(4,12,4)	(3,12,3,3)	(3,4,4,4)	2.4758490031575
565			(4,12,4)	(3,12,3,3)	(3,4,5,4)	3.2574126702332
566			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,5)	2.2558241444594
567			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,6)	2.3162762730244
568			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,7)	2.3860262049235
569			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,3,4)	2.4641920692516
570			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,8)	2.4641920692516
571			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,9)	2.5499595713617
572			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,10)	2.6425687808883
573			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,11)	2.7413157726280
574			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,12)	2.8455555838087
575			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,13)	2.9547032923716
576			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,14)	3.0682328973691
577			(4,13,4)	(3,13,3,3)	(3,4,3,3)	2.2222069850965
578			(4,13,4)	(3,13,3,3)	(3,4,3,4)	2.3232634353639
579			(4,13,4)	(3,13,3,3)	(3,4,3,3,3)	2.5578159791334
580			(4,13,4)	(3,13,3,3)	(3,4,4,4)	2.5998420166121
581			(4,13,4)	(3,13,3,3)	(3,4,5,4)	3.3470238795663
582			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,5)	2.4026077784924
583			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,6)	2.4594546833642
584			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,7)	2.5252529808176
585			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,3,4)	2.5992352953722
586			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,8)	2.5992352953722
587			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,9)	2.6806856179205
588			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,10)	2.7689260243409
589			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,11)	2.8633186570491
590			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,12)	2.9632698404113
591			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,13)	3.0682328973691
592			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,14)	3.1777090299530
593			(4,14,4)	(3,14,3,3)	(3,4,3,3)	2.3710962234011
594			(4,14,4)	(3,14,3,3)	(3,4,3,4)	2.4660029513075
595			(4,14,4)	(3,14,3,3)	(3,4,3,3,3)	2.6877316605059
596			(4,14,4)	(3,14,3,3)	(3,4,4,4)	2.7276400366935
597			(4,14,4)	(3,14,3,3)	(3,4,5,4)	3.4429824427021
598			(8,8,3)	(8,8,3)	(8,8,3)	2.1497256437880
599			(8,8,3)	(3,8,3,3)	(3,8,3,3)	1.8690012164061
600			(8,8,3)	(3,8,3,3)	(3,8,8)	2.2579413896112
601			(8,8,3)	(3,8,8)	(3,8,8)	3.4142135623731
602			(8,8,3)	(6,8,4)	(6,8,4)	4.2994512875760
603			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,3)	2.3693540254613
604			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,4)	2.4540063081118
605			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,3,3)	2.5611178676897
606			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,5)	2.5611178676897
607			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,6)	2.6896083877261
608			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,7)	2.8386279535405
609			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,3,4)	2.9693491815190
610			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,8)	3.0076253303879
611			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,9)	3.1964218161754
612			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,10)	3.4052758290510
613			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,11)	3.6349459864691
614			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,12)	3.8867653622366
615			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,13)	4.1627417583771

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
616			(3,14, 3, 3)	(3,14, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.2048729779278
617			(3,14, 3, 3)	(3,14, 3, 3)	(3, 3, 3,14)	4.4657021351903
618			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	2.2204628561899
619			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	2.3109558970717
620			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.4252598259893
621			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	2.4252598259893
622			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.5621995913956
623			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.7209323861516
624			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.8602248055588
625			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	2.9010350374439
626			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	3.1025939866372
627			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3,10)	3.3262893451780
628			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3,11)	3.5734886632919
629			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3,12)	3.8463719864744
630			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3,13)	4.1481149052794
631			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.1944569975304
632			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3,14)	4.4831664009556
633			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	2.0731321849710
634			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	2.1702939482798
635			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.2927977424728
636			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	2.2927977424728
637			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.4393961331533
638			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.6093238539426
639			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.7586170612811
640			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	2.8024101782398
641			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	3.0191945607754
642			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3,10)	3.2610489499624
643			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3,11)	3.5303367694622
644			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3,12)	3.8306487877702
645			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3,13)	4.1671719573698
646			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.2193194484501
647			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3,14)	4.5472804667061
648			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.9277348156444
649			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	2.0325796184758
650			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.1645319334072
651			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	2.1645319334072
652			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.3223289095163
653			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.5054149847988
654			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.6666816207973
655			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	2.7140911580449
656			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	2.9496798404562
657			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3,10)	3.2147319873589
658			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3,11)	3.5133370916661
659			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3,12)	3.8516243001061
660			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3,13)	4.2385995138432
661			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.2994044548613
662			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3,14)	4.6875875483766
663			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.7847685885980
664			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(10,10, 3)	3.0779794913125
665			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.8985614411982
666			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.0415541346237
667			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	2.0415541346237
668			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.2125950936685
669			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.4115890948452
670			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.5877305945674
671			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	2.6397132909677
672			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	2.8996945335464
673			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3,10)	3.1962266107498
674			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3,11)	3.5366702220830
675			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3,12)	3.9322817194762
676			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3,13)	4.4004568148186
677			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.4757491778287
678			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3,14)	4.9690674238380
679			(3,10, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(6,10, 4)	4.2338691077706
680			(3,10, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4,10, 6)	4.9433550798714
681			(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3,10,10)	4.1082266495914
682			(3,10, 3, 3)	(3, 6, 6)	(6,10, 4)	5.3062530270643
683			(3,10, 3, 3)	(10,10, 3)	(3,10,10)	8.5228288302125
684			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.6449124791018
685			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.7692705324754
686			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.9254187028011
687			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.9254187028011
688			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.1125883217959
689			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.3316387954170
690			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.5272942503388
691			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	2.5854271680490
692			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	2.8793852415718
693			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3,10)	3.2225308856769
694			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3,11)	3.6293538989905
695			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3,12)	4.1235203905997
696			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3,13)	4.7457254873464
697			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.8502701008646

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
698			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3,14)	5.5723735349233
699			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.5091166035481
700			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.6461854659840
701			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.8184815859909
702			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.8184815859909
703			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.0262121578338
704			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.2722441669330
705			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.4957075409207
706			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	2.5629154477415
707			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	2.9095575604770
708			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3,10)	3.3315611160724
709			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3,11)	3.8629962380490
710			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3,12)	4.5685324868646
711			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3,13)	5.5888820510876
712			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	5.7793964720044
713			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3,14)	7.3136775978926
714			(3, 8, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(6, 8, 4)	2.5198704296914
715			(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 8, 6)	2.7414408633281
716			(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 8, 8)	2.1334037830246
717			(3, 8, 3, 3)	(3, 6, 6)	(6, 8, 4)	2.8039135551837
718			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 8)	(3, 3, 3, 4)	3.1473334750913
719			(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(4, 8, 6)	6.8024304626517
720			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.3787562757436
721			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.5315607369348
722			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.7246709146558
723			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.7246709146558
724			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	1.9606615885934
725			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.2469796037175
726			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.5156276749877
727			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	2.5983484665612
728			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	3.0421491577136
729			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3,10)	3.6316535189216
730			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3,11)	4.4843305516578
731			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3,12)	5.9296903322034
732			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3,13)	9.5671506353565
733			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	10.7510003490968
734			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.2559260603991
735			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(6, 6, 4)	1.7360349347798
736			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.4292042610395
737			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6515935363575
738			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6515935363575
739			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(6, 6, 5)	2.8904791588392
740			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	1.9318516525781
741			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.2900259377468
742			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.6508463531453
743			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	2.7679854360425
744			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	3.4608492818074
745			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3,10)	4.6411441917255
746			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3,11)	7.6902927103646
747			(3, 6, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(5, 6, 6)	3.1057390536602
748			(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 6, 6)	1.8785650128320
749			(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 6, 8)	3.2665091810649
750			(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 6, 6)	1.3906843773376
751			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(6, 6, 4)	1.8846070552030
752			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 4)	1.6951062236633
753			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.1805141120249
754			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 5)	2.1805141120249
755			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(6, 6, 5)	3.6601715243672
756			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 6)	3.1014193772396
757			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 7)	6.5752441912204
758			(3, 6, 3, 3)	(3, 8, 8)	(6, 8, 4)	4.4756518375084
759			(3, 6, 3, 3)	(4, 6, 6)	(3, 4, 3, 4)	3.0069007107531
760			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.1441228056354
761			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(5, 5, 5)	1.6180339887499
762			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.3468366704417
763			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6180339887499
764			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6180339887499
765			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	1.9870217720085
766			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.5268292777930
767			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	3.1967927412379
768			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	3.45592268858042
769			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	5.9609878922797
770			(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 5, 4, 3)	3.8838954002377
771			(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 5, 3, 5)	3.0776835371753
772			(3, 5, 3, 3)	(3, 6, 6)	(5, 6, 6)	4.6435230050845
773			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 5)	1.2068438432900
774			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.0505014948077
775			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 6)	1.4187046815066
776			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.3065629648764
777			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 7)	1.6744822839444
778			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 3, 4)	1.9902592100154
779			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 8)	1.9902592100154

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
780			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6960257620654
781			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6960257620654
782			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 9)	2.3977631094599
783			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4,10)	2.9643819937277
784			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.3849521042238
785			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4,11)	3.8640188304379
786			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4,12)	5.7781181085086
787			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	4.4017590345476
788			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4,13)	63.2175936947309
789			(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 5)	(3, 4, 3, 4)	1.6142560914637
790			(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 5)	(3, 4, 3, 3, 3)	3.4094719757914
791			(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 5)	(3, 4, 4, 4)	4.2050406497963
792			(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.4470094406589
793			(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	3.5328708957304
794			(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	4.8847340418556
795			(3, 4, 3, 3)	(3, 6, 6)	(4, 6, 6)	2.2273598099659
796			(3, 4, 3, 3)	(3, 6, 6)	(4, 6, 8)	7.8608091906108
797			(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 6)	(3, 4, 3, 4)	2.3210912748798
798			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 3, 3, 4)	3.4142135623731
799			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(4, 4, 7)	5.0303491310606
800			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	1.4877921533475
801			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	1.8090169943749
802			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 7)	2.2622975357394
803			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3, 4)	2.9844656411773
804			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 8)	2.9844656411773
805			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 9)	4.5207789088127
806			(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	(4, 4, 6)	2.5279589543122
807			(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	(4, 4, 7)	4.7227240899738
808			(4, 4, 5)	(4, 6, 6)	(4, 6, 6)	9.1241012486160
809			(4, 4, 5)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 4)	6.0735939788562
810			(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.0000000000000
811			(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.4470094406589
812			(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	3.0776835371753
813			(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	3.0776835371753
814			(3, 3, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	1.5811388300842
815			(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	(6, 6, 4)	2.1213203435596
816			(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 4)	2.2273598099659
817			(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 3, 3)	4.6435230050845
818			(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 5)	4.6435230050845
819			(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	(6, 6, 5)	7.5796338776189
820			(6, 6, 4)	(6, 6, 4)	(6, 6, 4)	2.6457513110646
821			(6, 6, 4)	(6, 6, 4)	(6, 6, 5)	9.1241012486160
822			(5, 5, 5)	(5, 5, 5)	(5, 5, 5)	3.7024591736438
823			(10,10, 3)	(10,10, 3)	(10,10, 3)	8.2183343605926
824	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	0.8660254037844
825	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	0.9626924198812
826	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	1.0744805708748
827	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	1.1970850854857
828	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	1.3274898624399
829	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	1.4636030534499
830	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	1.4636030534499
831	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	1.6039684667553
832	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4,10)	1.7475600524206
833	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4,11)	1.8936431500996
834	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4,12)	2.0416825252255
835	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4,13)	2.1912814325983
836	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4,14)	2.3421408775009
837	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	1.0000000000000
838	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	1.1075433219776
839	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.4749205163937
840	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.8115759993244
841	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4, 4)	3.2600324466713
842	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	1.1180339887499
843	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	1.3139900684576
844	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	1.5551715833128
845	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	1.8557310657799
846	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3, 4)	2.2452400025760
847	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 8)	2.2452400025760
848	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 9)	2.7877065555154
849	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4,10)	3.6496014582307
850	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4,11)	5.4879074098064
851	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	1.2361175478356
852	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4, 3)	7.9843439059462
853	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.3575972638516
854	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	2.1614710210893
855	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 8)	5.0192038029992
856	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	1.4831603675465
857	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	1.6126866126344
858	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(4, 8, 6)	3.4265273530851
859	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	1.7457955750998
860	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4,10, 4)	(4,10, 4)	1.8820452948007
861	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4,10, 4)	(4,10, 6)	12.600607725518

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
862		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	2.0210092720641
863		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	2.1623045094416
864		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	2.3055986382782
865		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 14, 4)	(4, 14, 4)	2.4506081856329
866		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.2811042007441
867		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	2.1330029654128
868		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	1.6935270853311
869		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	2.3775900610299
870		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 7)	4.4555997182913
871		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	1.0000000000000
872		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.1407082402971
873		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.7514198939134
874		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	1.3295081343279
875		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	2.0497420733771
876		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 14, 3, 3)	(4, 14, 4)	2.8133214489239
877		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 13, 3, 3)	(4, 13, 4)	2.6826212153595
878		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 12, 3, 3)	(4, 12, 4)	2.5544279464996
879		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 11, 3, 3)	(4, 11, 4)	2.4290929263426
880		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 10, 3, 3)	(4, 10, 4)	2.3070706987832
881		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 9, 3, 3)	(4, 9, 4)	2.1889864216582
882		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 8, 3, 3)	(4, 8, 4)	2.0757728280549
883		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 7, 3, 3)	(4, 7, 4)	1.9689768080124
884		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 6, 3, 3)	(4, 6, 4)	1.8715399230265
885		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 5, 3, 3)	(4, 5, 4)	1.7901926268144
886		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 4)	1.7453849353439
887		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 4)	1.8477590650226
888		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 6, 6)	(4, 6, 4)	2.6208410542104
889		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	1.1180339887499
890		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	1.3139900684576
891		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	1.5551715833128
892		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	1.8557310657799
893		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	2.2452400025760
894		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	2.2452400025760
895		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	2.7877065555154
896		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	3.6496014582307
897		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	5.4879074098064
898		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	1.7453849353439
899		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	1.4856334612503
900		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	2.2882456112707
901		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	1.6262609376764
902		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.7608907317348
903		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	1.8930963839612
904		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	2.0245414893421
905		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	2.1560964399916
906		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	2.2882456112707
907		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	2.4212641031703
908		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	2.5553046591499
909		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	2.6904446627268
910		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 14, 4)	(4, 14, 4)	2.8267134963794
911		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	4.4171336565434
912		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 4)	2.2882456112707
913		(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 5)	2.4897996260159
914		(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.2464837087846
915		(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(5, 5, 5)	(4, 5, 4)	5.2360679774998
916		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	1.6124515496597
917		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(6, 6, 3)	(4, 6, 6)	2.9959403738533
918		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	2.6731774536620
919		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.0359236764270
920		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(6, 6, 4)	(4, 6, 4)	3.4989485116416
921		(4, 4, 3)	(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 5)	2.8456275506930
922		(4, 4, 3)	(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.0037313146328
923		(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 5)	3.0107307307977
924		(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(8, 8, 3)	(4, 8, 4)	2.6131259297528
925		(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.0376572056543
926		(4, 4, 3)	(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 5)	3.1705435969993
927		(4, 4, 3)	(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.1037123449773
928		(4, 4, 3)	(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 5)	3.3263737553150
929		(4, 4, 3)	(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.1880095708549
930		(4, 4, 3)	(4, 10, 4)	(10, 10, 3)	(4, 10, 4)	9.7446101783240
931		(4, 4, 3)	(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	(4, 4, 5)	3.4791150115370
932		(4, 4, 3)	(4, 11, 4)	(3, 11, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.2838126010679
933		(4, 4, 3)	(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	(4, 4, 5)	3.6294117816319
934		(4, 4, 3)	(4, 12, 4)	(3, 12, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.3874613464742
935		(4, 4, 3)	(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	(4, 4, 5)	3.7777477524888
936		(4, 4, 3)	(4, 13, 4)	(3, 13, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.4967979219598
937		(4, 4, 3)	(4, 14, 4)	(4, 14, 4)	(4, 4, 5)	3.9244973796033
938		(4, 4, 3)	(4, 14, 4)	(3, 14, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.6104680637186
939		(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.4047245793927
940		(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	10.3323112613055
941		(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	1.6935270853311
942		(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	2.3775900610299
943		(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	4.4555997182913

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 1

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c
944		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	0.7071067811865
945		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	0.8794652240646
946		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.1478467401891
947		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6180339887499
948		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6180339887499
949		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.8981832422992
950		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	1.0000000000000
951		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	1.2018498850284
952		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	3.0221088693172
953		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	2.5881662928569
954		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	2.4519914282739
955		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	2.3188200592554
956		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	2.1893118380724
957		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	2.0643780868563
958		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	1.9453537805568
959		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	1.8343618543286
960		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	1.7351925506392
961		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	1.6558365992537
962		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	2.3058000812441
963		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	1.6180339887499
964		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.7169419311695
965		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 4)	1.4856334612503
966		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	2.6434661548451
967		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	2.4205801546144
968		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	2.4188581648783
969		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	2.4794326277709
970		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	2.5665449198145
971		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	2.6676222440029
972		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	2.7771299239076
973		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 11, 4)	(3, 11, 3, 3)	2.8922652698884
974		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 12, 4)	(3, 12, 3, 3)	3.0114630071868
975		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 13, 4)	(3, 13, 3, 3)	3.1337814307907
976		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 14, 4)	(3, 14, 3, 3)	3.2586186907225
977		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	(3, 4, 4)	5.2360679774998
978		(3, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	(4, 14, 4)	(3, 4, 3, 3)	8.1775075030370
979		(3, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(4, 13, 4)	(3, 4, 3, 3)	8.5511717736642
980		(3, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(4, 12, 4)	(3, 4, 3, 3)	9.2399423256455
981		(3, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(4, 11, 4)	(3, 4, 3, 3)	10.6923891658005
982		(3, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(4, 10, 4)	(3, 4, 3, 3)	15.2963987852038
983		(3, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(8, 8, 3)	(3, 8, 3, 3)	4.8292880628923
984		(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(6, 6, 3)	(3, 6, 3, 3)	2.0313513666686
985		(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(6, 6, 3)	(3, 6, 6)	2.8219615378686
986		(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	1.5811388300842
987		(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	2.2273598099659
988		(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 5)	4.6435230050845
989		(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.9217181031995
990		(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	6.1632933762333
991		(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	2.3345476805478
992		(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	3.2498966514636
993		(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(3, 4, 4)	(3, 6, 3, 3)	2.9164424557751
994		(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	2.3709323785295
995		(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	(4, 6, 4)	8.2789503961853
996	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	1.0744805708748
997	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	1.4337243914993
998	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	2.2130600506867
999	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	1.6180339887499
1000	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	4.6435230050845

A.2 Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
126			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	<u>0_6324555320337</u>	
127			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	0.7071067811865	
944		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	<u>0_7071067811865</u>	
168			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	<u>0_7745966692415</u>	
142			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	0.7905694150421	
1			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	<u>0_7905694150421</u>	
14			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	<u>0_8164965809277</u>	2
143			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	<u>0_8368950163968</u>	1
15			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	<u>0_8545454093319</u>	1
2			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	0.8660254037844	
231			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	0.8660254037844	
824	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	<u>0_8660254037844</u>	
128			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	0.8794652240646	
163			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	0.8794652240646	3
945	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	0.8794652240646	
169			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	<u>0_8794652240646</u>	3

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
48			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	0.8948229778808	1
20			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	0.9128709291753	2
229			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	0.9128709291753	2
283			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	0.9430407487778	1
256			(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	0.9626924198812	
825	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	0.9626924198812	
233			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 4)	0.9626924198812	
160			(3, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	1.0000000000000	3
170			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.0000000000000	
331			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	1.0000000000000	
810			(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.0000000000000	
871	(4, 4, 3)		(3, 4, 4)	(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	1.0000000000000	
950	(3, 3, 3)		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	1.0000000000000	
16			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.0000000000000	
21			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	1.0000000000000	1
144			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.0000000000000	
171			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.0000000000000	3
837	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	1.0000000000000	
32			(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	1.0280759364382	2
230			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	1.0280759364382	2
49			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.0283350293622	1
164			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.0317836260834	
189			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 4)	1.0317836260834	
359			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.0317836260834	
774			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.0505014948077	1
261			(3, 4, 4)	(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	1.0744805708748	
237			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.0744805708748	
238			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 5)	1.0744805708748	
3			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	1.0744805708748	
826	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	1.0744805708748	
53			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	1.0744805708748	
996	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	1.0744805708748	
285			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.0865776768169	1
282			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 5)	1.0959855872742	1
332			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	1.1061676173844	2
343			(4, 4, 4)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	1.1061676173844	2
838	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	1.1075433219776	1
22			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	1.1180339887499	1
257			(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.1180339887499	
842	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	1.1180339887499	
889	(4, 4, 3)		(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	1.1180339887499	
158			(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	1.1304540227832	3
172			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	1.1304540227832	3
402			(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.1365469837747	1
872	(4, 4, 3)		(3, 4, 4)	(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.1407082402971	1
760			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.1441228056354	1
946	(3, 3, 3)		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.1478467401891	1
232			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 6)	1.1547005383793	2
34			(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.1547005383793	2
54			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	1.1739315546221	1
312			(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.1832159566199	
77			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.1832159566199	
827	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	1.1970850854857	
241			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 6)	1.1970850854857	
264			(3, 4, 4)	(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	1.1970850854857	
159			(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	1.1998999434206	1
951	(3, 3, 3)		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	1.2018498850284	1
389			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 5)	1.2030019100151	2
773			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 5)	1.2068438432900	1
333			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	1.2247448713916	2
185			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.2247448713916	
345			(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.2247448713916	2
190			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.2297911042740	1
191			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 5)	1.2297911042740	1
851	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	1.2361175478356	1
360			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.2437516475077	1
284			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 6)	1.2456297057804	1
364			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	1.2486060204784	1
429			(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.2529812470232	1
734			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.2559260603991	1
289			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.2597328151595	1
290			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.2597328151595	1
183			(3, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	1.2649110640674	
210			(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	1.2649110640674	
157			(3, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	1.2676021023674	3
173			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	1.2676021023674	3
23			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	1.2741623922635	1
217			(6, 6, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	1.2742336201788	1
213			(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.2747548783982	
265			(3, 4, 4)	(4, 6, 4)	(3, 6, 6)	1.2747548783982	
64			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 6)	1.2747548783982	
866	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.2811042007441	1

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
55			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 7)	1.2879915926397	1
234			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 7)	1.2889214913791	2
38			(4, 4, 3)	(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	1.2889214913791	2
776			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.3065629648764	4
391			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 6)	1.3128620634895	2
414			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	1.3128620634895	2
843	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	1.3139900684576	1
890	(4, 4, 3)		(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	1.3139900684576	1
244			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 7)	1.3274898624399	
828	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	1.3274898624399	
266			(3, 4, 4)	(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	1.3274898624399	
308			(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	(3, 4, 3, 4)	1.3281310261041	1
403			(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.3281310261041	1
874	(4, 4, 3)		(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	1.3295081343279	1
218			(6, 6, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	1.3374135989270	1
50			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.3452992222899	1
762			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.3468366704417	1
165			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.3516822182379	1
334			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	1.3520300579520	2
349			(4, 4, 4)	(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	1.3520300579520	2
434			(4, 6, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 6, 6)	1.3542484191547	1
853	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.3575972638516	1
465			(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.3780485284423	1
174			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	1.3783989547414	1
720			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.3787562757436	1
750			(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 6, 6)	1.3906843773376	1
65			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 7)	1.3925680394810	1
51			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	1.4047245793927	1
939	(4, 4, 3)		(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.4047245793927	1
166			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	1.4047245793927	1
145			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.4057619266345	1
286			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 7)	1.4083579967203	1
155			(3, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	1.4094376878690	3
175			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	1.4094376878690	3
56			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3, 4)	1.4133917348805	1
57			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 8)	1.4133917348805	1
219			(6, 6, 3)	(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	1.4142135623731	1
365			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	1.4142135623731	1
416			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 6)	1.4142135623731	1
775			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 6)	1.4187046815066	1
430			(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.4273174361375	1
39			(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	1.4284397482988	2
235			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.4284397482988	1
236			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 8)	1.4284397482988	2
736			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.4292042610395	1
454			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 5)	1.4323379752543	2
392			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 7)	1.4323379752543	2
997	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	1.4337243914993	
258			(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	1.4337243914993	
246			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3, 4)	1.4337243914993	
792			(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.4470094406589	
811			(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.4470094406589	
293			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	1.4616519166353	1
247			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 8)	1.4636030534499	
267			(3, 4, 4)	(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	1.4636030534499	
829	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	1.4636030534499	1
830	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	1.4636030534499	
839	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	1.4749205163937	
192			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 6)	1.4759894490559	1
856	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	1.4831603675465	1
899	(4, 4, 3)		(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	1.4856334612503	
965	(3, 3, 3)		(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 4)	1.4856334612503	
24			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.4856334612503	
25			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 8)	1.4856334612503	
146			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4, 4)	1.4856334612503	
259			(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 4, 4)	1.4856334612503	
335			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.4856334612503	
336			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 8)	1.4856334612503	2
350			(4, 4, 4)	(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	1.4856334612503	2
390			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(5, 5, 5)	1.4877921533475	
800			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	1.4877921533475	
699			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.5091166035481	1
483			(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.5095764889788	1
66			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 3, 4)	1.5200855004131	1
67			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 8)	1.5200855004131	1
81			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 7)	1.5244586697612	1
78			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.5256334323896	1
417			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 7)	1.5257736652616	2
455			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 6)	1.5257736652616	2
721			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.5315607369348	1
466			(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.5373682481086	1
58			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 9)	1.5487434512203	1

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
154			(3, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	1.5546569762232	3
176			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	1.5546569762232	3
844		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	1.5551715833128	1
891		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	1.5551715833128	1
393			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.5590745905621	1
394			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 8)	1.5590745905621	2
471			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 5)	1.5590745905621	2
239			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 9)	1.5717796842868	2
41			(4, 4, 3)	(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	1.5717796842868	2
211			(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 4)	1.5811388300842	1
814			(3, 3, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	1.5811388300842	
986		(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	1.5811388300842	
287			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 3, 4)	1.5828897211988	
288			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 8)	1.5828897211988	1
79			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 4, 4)	1.5828897211988	
323			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 3, 3, 4)	1.5828897211988	
366			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 7)	1.6000628928598	1
249			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 9)	1.6039684667553	
831		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	1.6039684667553	
269			(3, 4, 4)	(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	1.6039684667553	
35			(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	1.6124515496597	1
214			(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	1.6124515496597	1
438			(4, 6, 4)	(3, 6, 6)	(3, 4, 3, 4)	1.6124515496597	
916		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	1.6124515496597	
319			(3, 4, 4)	(4, 4, 6)	(3, 4, 3, 4)	1.6124515496597	
857		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	1.6126866126344	1
789			(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 5)	(3, 4, 3, 4)	1.6142560914637	1
129			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.6180339887499	
130			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6180339887499	
763			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6180339887499	
764			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6180339887499	(4)
947		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6180339887499	
948		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6180339887499	
963		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	1.6180339887499	
203			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	(3, 3, 3, 5)	1.6180339887499	
199			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6180339887499	
200			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6180339887499	
161			(3, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 5)	1.6180339887499	
761			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(5, 5, 5)	1.6180339887499	
999	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	1.6180339887499	
17			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.6236716667998	1
337			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 9)	1.6239328935037	2
352			(4, 4, 4)	(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	1.6239328935037	2
901		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	1.6262609376764	1
456			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 7)	1.6297148692981	2
684			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.6449124791018	1
418			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.6453287760161	1
419			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 8)	1.6453287760161	2
472			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 6)	1.6453287760161	2
506			(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.6460055359316	1
700			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	1.6461854659840	1
737			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6515935363575	1
738			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6515935363575	1
68			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 9)	1.6540528266993	1
484			(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.6557657380576	1
961		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	1.6558365992537	1
375			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 6)	1.6583123951777	
346			(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	1.6583123951777	
415			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(6, 6, 4)	1.6583123951777	
82			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 3, 4)	1.6712999582125	1
83			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 8)	1.6712999582125	1
777			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 7)	1.6744822839444	1
278			(3, 4, 4)	(3, 6, 3, 3)	(4, 6, 6)	1.6796925924246	1
395			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 9)	1.6913795672034	2
495			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 5)	1.6913795672034	2
868		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	1.6935270853311	
262			(3, 4, 4)	(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 5)	1.6935270853311	
941		(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	1.6935270853311	
59			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 10)	1.6935270853311	1
752			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 4)	1.6951062236633	1
296			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	1.6953540714636	1
780			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.6960257620654	1
781			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.6960257620654	1
361			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.6987933095147	1
186			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.6988629556124	1
177			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 10)	1.7023845272343	3
152			(3, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	1.7023845272343	3
964		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.7169419311695	1
42			(4, 4, 3)	(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	1.7179544004668	2
240			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 10)	1.7179544004668	2
722			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.7246709146558	1
723			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.7246709146558	1

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
383			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 4)	$\underline{1.7320508075689}$	
960		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	$\underline{1.7351925506392}$	1
404			(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	$\underline{1.7358599865523}$	1
735			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(6, 6, 4)	$\underline{1.7360349347798}$	1
313			(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	$\underline{1.7405705750130}$	1
457			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 3, 4)	$\underline{1.7421515602244}$	1
458			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 8)	$\underline{1.7421515602244}$	2
473			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 7)	$\underline{1.7421515602244}$	2
886		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 4)	$\underline{1.7453849353439}$	1
898		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	$\underline{1.7453849353439}$	1
859		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	$\underline{1.7457955750998}$	1
250			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 10)	$\underline{1.7475600524206}$	
270			(3, 4, 4)	(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	$\underline{1.7475600524206}$	
832		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	$\underline{1.7475600524206}$	
873		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	$\underline{1.7514198939134}$	
902		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	$\underline{1.7608907317348}$	1
338			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 10)	$\underline{1.7657955682213}$	2
353			(4, 4, 4)	(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	$\underline{1.7657955682213}$	2
291			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 9)	$\underline{1.7690528347569}$	1
685			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	$\underline{1.7692705324754}$	1
421			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 9)	$\underline{1.7712024284658}$	2
496			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 6)	$\underline{1.7712024284658}$	2
362			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	$\underline{1.7788236456639}$	1
156			(3, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 8)	$\underline{1.7791615995435}$	1
507			(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	$\underline{1.7807038172341}$	1
663			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	$\underline{1.7847685885980}$	1
187			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 4, 4)	$\underline{1.7854054561113}$	1
523			(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	$\underline{1.7862076179023}$	1
193			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 7)	$\underline{1.7873830995918}$	1
885		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 5, 3, 3)	(4, 5, 4)	$\underline{1.7901926268144}$	1
26			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 9)	$\underline{1.7904572220260}$	1
69			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 10)	$\underline{1.7926308854760}$	1
431			(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	$\underline{1.8014916055634}$	1
405			(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	$\underline{1.8061441787369}$	1
367			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3, 4)	$\underline{1.8061441787369}$	1
368			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 8)	$\underline{1.8061441787369}$	1
801			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	$\underline{1.8090169943749}$	1
701			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	$\underline{1.8184815859909}$	1
702			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	$\underline{1.8184815859909}$	1
396			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 10)	$\underline{1.8280155323464}$	2
511			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 5)	$\underline{1.8280155323464}$	2
84			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 9)	$\underline{1.8285933382416}$	1
959		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	$\underline{1.8343618543286}$	1
74			(4, 4, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6, 6)	$\underline{1.8439088914586}$	
316			(3, 4, 4)	(3, 6, 6)	(4, 6, 6)	$\underline{1.8439088914586}$	
220			(6, 6, 3)	(6, 6, 4)	(6, 6, 4)	$\underline{1.8439088914586}$	
268			(3, 4, 4)	(4, 8, 4)	(3, 8, 8)	$\underline{1.8477590650226}$	
314			(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	$\underline{1.8477590650226}$	
887		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 4)	$\underline{1.8477590650226}$	
90			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 3, 4)	$\underline{1.8477590650226}$	
91			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 8)	$\underline{1.8477590650226}$	
99			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 8)	$\underline{1.8477590650226}$	
474			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 3, 4)	$\underline{1.8477590650226}$	
475			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 8)	$\underline{1.8477590650226}$	(2)
470			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(8, 8, 3)	$\underline{1.8477590650226}$	
18			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4, 4)	$\underline{1.8477590650226}$	
60			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 11)	$\underline{1.8477689904598}$	1
178			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 11)	$\underline{1.8520153229578}$	3
151			(3, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	$\underline{1.8520153229578}$	3
845		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	$\underline{1.8557310657799}$	1
892		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	$\underline{1.8557310657799}$	1
459			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 9)	$\underline{1.8614895434057}$	2
497			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 7)	$\underline{1.8614895434057}$	2
432			(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	$\underline{1.8658457801852}$	1
44			(4, 4, 3)	(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	$\underline{1.8662823274137}$	2
242			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 11)	$\underline{1.8662823274137}$	2
599			(8, 8, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	$\underline{1.8690012164061}$	1
884		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 6, 3, 3)	(4, 6, 4)	$\underline{1.8715399230265}$	1
309			(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	(3, 4, 3, 3, 3)	$\underline{1.8754048211044}$	1
748			(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 6, 6)	$\underline{1.8785650128320}$	1
860		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	$\underline{1.8820452948007}$	1
467			(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	$\underline{1.8838666207530}$	1
751			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(6, 6, 4)	$\underline{1.8846070552030}$	1
435			(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	(4, 6, 6)	$\underline{1.8930378060148}$	1
903		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	$\underline{1.8930963839612}$	1
833		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	$\underline{1.8936431500996}$	
251			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 11)	$\underline{1.8936431500996}$	
272			(3, 4, 4)	(4, 11, 4)	(3, 11, 3, 3)	$\underline{1.8936431500996}$	
665			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	$\underline{1.8985614411982}$	1
422			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 10)	$\underline{1.9021130325903}$	2
513			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 6)	$\underline{1.9021130325903}$	2
298			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	$\underline{1.9050956844255}$	1

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
339			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 11)	1.9104126235668	1
355			(4, 4, 4)	(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	1.9104126235668	1
524			(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	1.9108345330172	1
989	(6, 6, 3)		(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	1.9217181031995	1
686			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	1.9254187028011	1
687			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	1.9254187028011	1
648			(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	1.9277348156444	1
545			(4, 11, 4)	(3, 11, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	1.9293587269667	1
740			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	1.9318516525781	4
70			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 11)	1.9346505606249	1
468			(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	1.9436999186104	1
958	(3, 3, 3)		(3, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	1.9453537805568	1
724			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	1.9606615885934	1
476			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 9)	1.9606796841376	2
498			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 3, 4)	1.9606796841376	1
499			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 8)	1.9606796841376	2
376			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 7)	1.9673508598052	1
292			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 10)	1.9674433999352	1
299			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	1.9679680537909	1
397			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 11)	1.9680658500247	2
534			(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	(4, 4, 5)	1.9680658500247	2
883	(4, 4, 3)		(3, 4, 4)	(3, 7, 3, 3)	(4, 7, 4)	1.9689768080124	1
407			(4, 5, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 5, 3, 5)	1.9757970370024	1
485			(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	1.9781448879832	1
310			(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	(3, 4, 4, 4)	1.9787054780462	1
460			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 10)	1.9864589767613	2
514			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 7)	1.9864589767613	2
765			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	1.9870217720085	1
488			(4, 8, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 8, 8)	1.9902592100154	1
778			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 3, 4)	1.9902592100154	1
779			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 8)	1.9902592100154	1
85			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 10)	1.9942495712871	1
150			(3, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	2.0031202459493	3
179			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 12)	2.0031202459493	3
324			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(4, 4, 7)	2.0069186467091	1
61			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 12)	2.0119136989192	1
243			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 12)	2.016279774372	2
45			(4, 4, 3)	(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	2.016279774372	2
862	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	2.0210092720641	1
904	(4, 4, 3)		(4, 4, 4)	(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	2.0245414893421	1
703			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.0262121578338	1
984	(3, 3, 3)		(3, 6, 3, 3)	(6, 6, 3)	(3, 6, 3, 3)	2.0313513666686	1
649			(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	2.0325796184758	1
486			(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	2.0341635103229	1
369			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 9)	2.0343275518360	1
423			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 11)	2.0370754508077	2
535			(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	(4, 4, 6)	2.0370754508077	2
666			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.0415541346237	1
667			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	2.0415541346237	1
252			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 12)	2.0416825252255	
834	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 12)	2.0416825252255	
273			(3, 4, 4)	(4, 12, 4)	(3, 12, 3, 3)	2.0416825252255	
92			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 9)	2.0443310566329	1
100			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 9)	2.0443310566329	1
546			(4, 11, 4)	(3, 11, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	2.0451336799537	1
875	(4, 4, 3)		(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	2.0497420733771	1
340			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 12)	2.0571948880864	2
356			(4, 4, 4)	(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	2.0571948880864	2
957	(3, 3, 3)		(3, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	2.0643780868563	1
500			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 9)	2.0674419182184	2
633			(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	2.0731321849710	1
561			(4, 12, 4)	(3, 12, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	2.0748439845282	1
882	(4, 4, 3)		(3, 4, 4)	(3, 8, 3, 3)	(4, 8, 4)	2.0757728280549	1
71			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 12)	2.0793165123461	1
477			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 10)	2.0796972784366	2
515			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 3, 4)	2.0796972784366	1
516			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 8)	2.0796972784366	2
508			(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.0816249836270	1
194			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.1002009374032	1
398			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 12)	2.1108428660890	2
550			(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	(4, 4, 5)	2.1108428660890	2
688			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.1125883217959	1
461			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 11)	2.1160485981869	2
536			(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	(4, 4, 7)	2.1160485981869	2
222			(6, 6, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6, 6)	2.1213203435596	
815			(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	(6, 6, 4)	2.1213203435596	
867	(4, 4, 3)		(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	2.1330029654128	1
716			(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 8, 8)	2.1334037830246	1
509			(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	2.1342755088937	1
184			(3, 3, 3)	(3, 8, 8)	(3, 8, 8)	2.1497256437880	
598			(8, 8, 3)	(8, 8, 3)	(8, 8, 3)	2.1497256437880	
180			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	2.1553877590020	3

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
149			(3, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	2.1553877590020	3
905		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	2.1560964399916	1
854		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	2.1614710210893	1
863		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	2.1623045094416	1
650			(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.1645319334072	1
651			(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	2.1645319334072	1
86			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4, 11)	2.1672190850281	1
46			(4, 4, 3)	(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	2.1675952358107	2
245			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4, 13)	2.1675952358107	2
634			(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	2.1702939482798	1
424			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4, 12)	2.1753277471611	2
551			(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	(4, 4, 6)	2.1753277471611	2
181			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	2.1775242112341	1
294			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 11)	2.1792951484760	1
753			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.1805141120249	1
754			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 5)	2.1805141120249	1
517			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 9)	2.1806402801364	2
501			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 10)	2.1806402801364	2
162			(3, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3, 3)	2.18181818369929	1
562			(4, 12, 4)	(3, 12, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	2.1828138278598	1
62			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 13)	2.1867781085728	1
881	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 9, 3, 3)	(4, 9, 4)	2.1889864216582	1
956	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	2.1893118380724	1
253			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 13)	2.1912814325983	1
835	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 13)	2.1912814325983	1
274			(3, 4, 4)	(4, 13, 4)	(3, 13, 3, 3)	2.1912814325983	1
525			(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.1925081003689	1
195			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 8)	2.2019299228077	1
478			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 11)	2.2038110566629	2
537			(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	(4, 4, 3, 4)	2.2038110566629	2
538			(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	(4, 4, 8)	2.2038110566629	2
341			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 13)	2.2057052779045	2
357			(4, 4, 4)	(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	2.2057052779045	2
668			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.2125950936685	1
263			(3, 4, 4)	(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3, 3)	2.2130600506867	1
998	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	2.2130600506867	1
254			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3, 5)	2.2130600506867	1
618			(3, 13, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	2.2204628561899	1
577			(4, 13, 4)	(3, 13, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	2.2222069850965	1
72			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4, 13)	2.2260635151980	1
795			(3, 4, 3, 3)	(3, 6, 6)	(4, 6, 6)	2.2273598099659	1
816			(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 4)	2.2273598099659	1
987	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 4)	2.2273598099659	1
442			(4, 6, 4)	(6, 6, 4)	(4, 6, 6)	2.2360679774998	1
445			(4, 6, 4)	(4, 4, 6)	(4, 6, 6)	2.2360679774998	1
526			(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	2.2421238339022	1
846	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3, 4)	2.2452400025760	1
847	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 8)	2.2452400025760	1
893	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	2.2452400025760	1
894	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	2.2452400025760	1
439			(4, 6, 4)	(3, 6, 6)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.2459694766195	1
725			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.2469796037175	4
167			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	2.2486533399101	1
462			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 12)	2.2494523967345	2
552			(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	(4, 4, 7)	2.2494523967345	2
112			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.2535251879095	1
399			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 13)	2.2558241444594	2
566			(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	(4, 4, 5)	2.2558241444594	2
600			(8, 8, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 8)	2.2579413896112	1
93			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 10)	2.2600389869704	1
101			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 10)	2.2600389869704	1
802			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 7)	2.2622975357394	1
704			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.2722441669330	1
27			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 10)	2.2882456112707	1
906	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	2.2882456112707	1
344			(4, 4, 4)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4, 3)	2.2882456112707	1
900	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	2.2882456112707	1
912	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 4)	2.2882456112707	1
260			(3, 4, 4)	(4, 4, 4)	(3, 4, 5, 4)	2.2882456112707	1
370			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 10)	2.2882456112707	1
518			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(4, 4, 10)	2.2882456112707	1
741			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.2900259377468	1
301			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	2.2923194341791	1
635			(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.2927977424728	1
636			(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	2.2927977424728	1
106			(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	(4, 4, 9)	2.2974881732558	1
502			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 11)	2.2993117306895	2
539			(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	(4, 4, 9)	2.2993117306895	2
864	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	2.3055986382782	1
962	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	2.3058000812441	1
880	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 10, 3, 3)	(4, 10, 4)	2.3070706987832	1
182			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	2.3085869096904	3

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
148			(3, 3, 3)	(3,14, 3, 3)	(3,14, 3, 3)	2.3085869096904	3
547			(4,11, 4)	(3,11, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.3094764858686	1
619			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	2.3109558970717	1
425			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4,13)	2.3162762730244	2
567			(4,13, 4)	(4,13, 4)	(4, 4, 6)	2.3162762730244	2
955		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	2.3188200592554	1
248			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(4, 4,14)	2.3199678172026	2
47			(4, 4, 3)	(4,14, 4)	(4,14, 4)	2.3199678172026	2
797			(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 6)	(3, 4, 3, 4)	2.3210912748798	1
652			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.3223289095163	1
578			(4,13, 4)	(3,13, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	2.3232634353639	1
689			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.3316387954170	1
479			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4,12)	2.3322001605256	2
553			(4,12, 4)	(4,12, 4)	(4, 4, 3, 4)	2.3322001605256	1
554			(4,12, 4)	(4,12, 4)	(4, 4, 8)	2.3322001605256	2
991		(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	2.3345476805478	1
255			(3, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3,14)	2.3421408775009	
836		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4,14)	2.3421408775009	
275			(3, 4, 4)	(4,14, 4)	(3,14, 3, 3)	2.3421408775009	
87			(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	(4, 4,12)	2.3470061074185	1
342			(4, 4, 4)	(4, 4, 4)	(4, 4,14)	2.3556140047814	2
358			(4, 4, 4)	(4,14, 4)	(4,14, 4)	2.3556140047814	2
548			(4,11, 4)	(3,11, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	2.3563323141838	1
603			(3,14, 3, 3)	(3,14, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	2.3693540254613	1
201			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.3703620934354	1
204			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	(3, 3, 3, 6)	2.3703620934354	1
377			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 3, 4)	2.3709323785295	
378			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 8)	2.3709323785295	
440			(4, 6, 4)	(3, 6, 6)	(3, 4, 4, 4)	2.3709323785295	
215			(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 8)	2.3709323785295	
347			(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	(4, 6, 8)	2.3709323785295	
994		(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 4, 4)	(4, 6, 4)	2.3709323785295	
351			(4, 4, 4)	(4, 8, 4)	(4, 8, 6)	2.3709323785295	
427			(4, 6, 4)	(4, 8, 4)	(6, 8, 4)	2.3709323785295	
593			(4,14, 4)	(3,14, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	2.3710962234011	1
63			(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4,14)	2.3735541081632	1
73			(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	(4, 4,14)	2.3744770595850	1
942		(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	2.3775900610299	1
869		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	2.3775900610299	1
784			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.3849521042238	1
463			(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4,13)	2.3860262049235	2
568			(4,13, 4)	(4,13, 4)	(4, 4, 7)	2.3860262049235	2
782			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 9)	2.3977631094599	1
519			(4,10, 4)	(4,10, 4)	(4, 4,11)	2.4016057921801	2
540			(4,11, 4)	(4,11, 4)	(4, 4,10)	2.4016057921801	2
400			(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4,14)	2.4026077784924	2
582			(4,14, 4)	(4,14, 4)	(4, 4, 5)	2.4026077784924	2
295			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4,12)	2.4064664432462	1
277			(3, 4, 4)	(3, 8, 3, 3)	(4, 8, 6)	2.4086196502713	1
669			(3,10, 3, 3)	(3,10, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.4115890948452	1
113			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	2.4148861690271	1
968		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	2.4188581648783	1
967		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	2.4205801546144	1
907		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4,11, 4)	(4,11, 4)	2.4212641031703	1
503			(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4,12)	2.4226450111752	2
555			(4,12, 4)	(4,12, 4)	(4, 4, 9)	2.4226450111752	2
620			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.4252598259893	1
621			(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	2.4252598259893	1
879		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3,11, 3, 3)	(4,11, 4)	2.4290929263426	1
563			(4,12, 4)	(3,12, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.4315143057561	1
637			(3,12, 3, 3)	(3,12, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.4393961331533	1
865		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4,14, 4)	(4,14, 4)	2.4506081856329	1
954		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	(3,13, 3, 3)	2.4519914282739	1
604			(3,14, 3, 3)	(3,14, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	2.4540063081118	1
426			(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 4,14)	2.4594546833642	2
583			(4,14, 4)	(4,14, 4)	(4, 4, 6)	2.4594546833642	2
480			(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4,13)	2.4641920692516	1
569			(4,13, 4)	(4,13, 4)	(4, 4, 3, 4)	2.4641920692516	1
570			(4,13, 4)	(4,13, 4)	(4, 4, 8)	2.4641920692516	1
594			(4,14, 4)	(3,14, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	2.4660029513075	1
564			(4,12, 4)	(3,12, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	2.4758490031575	1
969		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	2.4794326277709	1
913		(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4)	(4, 4, 5)	2.4897996260159	1
279			(3, 4, 4)	(3, 6, 3, 3)	(4, 6, 8)	2.4911339993545	1
705			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.4957075409207	1
94			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4,11)	2.4959132240311	1
102			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4,11)	2.4959132240311	1
327			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 3, 3, 3, 3)	2.4972120409568	
328			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 3, 3, 5)	2.4972120409568	
281			(3, 4, 4)	(3, 5, 3, 3)	(4, 5, 4, 3)	2.4972120409568	
80			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 5, 4)	2.4972120409568	
653			(3,11, 3, 3)	(3,11, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.5054149847988	1

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
541			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,11)	2.5098511478904	2
726			(3,7,3,3)	(3,7,3,3)	(3,3,3,3,4)	2.5156276749877	1
714			(3,8,3,3)	(3,6,3,3)	(6,8,4)	2.5198704296914	1
520			(4,10,4)	(4,10,4)	(4,4,12)	2.5199374588110	2
556			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,10)	2.5199374588110	2
464			(4,7,4)	(4,7,4)	(4,4,14)	2.5252529808176	2
584			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,7)	2.5252529808176	2
766			(3,5,3,3)	(3,5,3,3)	(3,3,3,7)	2.5268292777930	1
690			(3,9,3,3)	(3,9,3,3)	(3,3,3,3,4)	2.5272942503388	1
806			(4,4,5)	(4,4,6)	(4,4,6)	2.5279589543122	1
401			(4,5,4)	(4,6,4)	(5,6,6)	2.5279589543122	1
420			(4,6,4)	(4,6,4)	(6,6,5)	2.5279589543122	1
88			(4,4,3)	(4,4,7)	(4,4,13)	2.5334564988851	1
385			(4,4,4)	(4,4,7)	(4,4,7)	2.5342468588086	1
504			(4,9,4)	(4,9,4)	(4,4,13)	2.5499595713617	2
571			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,9)	2.5499595713617	2
878	(4,4,3)		(3,4,4)	(3,12,3,3)	(4,12,4)	2.5544279464996	1
908	(4,4,3)		(4,4,4)	(4,12,4)	(4,12,4)	2.5553046591499	1
579			(4,13,4)	(3,13,3,3)	(3,4,3,3,3)	2.5578159791334	1
605			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,3,3)	2.5611178676897	1
606			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,5)	2.5611178676897	1
622			(3,13,3,3)	(3,13,3,3)	(3,3,3,6)	2.5621995913956	1
706			(3,8,3,3)	(3,8,3,3)	(3,3,3,8)	2.5629154477415	4
75			(4,4,3)	(4,6,6)	(4,6,8)	2.5653843882515	1
970	(3,3,3)		(3,4,4)	(4,8,4)	(3,8,3,3)	2.5665449198145	1
371			(4,4,4)	(4,4,5)	(4,4,11)	2.5736212823916	1
691			(3,9,3,3)	(3,9,3,3)	(3,3,3,8)	2.5854271680490	1
670			(3,10,3,3)	(3,10,3,3)	(3,3,3,3,4)	2.5877305945674	1
953	(3,3,3)		(3,3,3)	(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	2.5881662928569	1
107			(4,4,3)	(4,4,9)	(4,4,10)	2.5922789997394	1
727			(3,7,3,3)	(3,7,3,3)	(3,3,3,8)	2.5983484665612	1
481			(4,8,4)	(4,8,4)	(4,4,14)	2.5992352953722	2
585			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,3,4)	2.5992352953722	1
586			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,8)	2.5992352953722	2
580			(4,13,4)	(3,13,3,3)	(3,4,4,4)	2.5998420166121	1
638			(3,12,3,3)	(3,12,3,3)	(3,3,3,7)	2.6093238539426	1
119			(4,4,3)	(3,4,4,4)	(3,4,4,4)	2.6131259297528	1
325			(3,4,4)	(3,4,3,4)	(4,4,3,4)	2.6131259297528	1
326			(3,4,4)	(3,4,3,4)	(4,4,8)	2.6131259297528	1
491			(4,8,4)	(3,8,8)	(3,4,3,4)	2.6131259297528	1
924	(4,4,3)		(4,8,4)	(8,8,3)	(4,8,4)	2.6131259297528	1
482			(4,8,4)	(8,8,3)	(4,8,6)	2.6131259297528	1
40			(4,4,3)	(4,8,4)	(4,8,6)	2.6131259297528	1
888	(4,4,3)		(3,4,4)	(3,6,6)	(4,6,4)	2.6208410542104	1
542			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,12)	2.6233046334446	2
557			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,11)	2.6233046334446	2
671			(3,10,3,3)	(3,10,3,3)	(3,3,3,8)	2.6397132909677	1
521			(4,10,4)	(4,10,4)	(4,4,13)	2.6425687808883	2
572			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,10)	2.6425687808883	2
966	(3,3,3)		(3,4,4)	(4,4,4)	(3,4,3,3)	2.6434661548451	1
221			(6,6,3)	(6,6,4)	(6,6,5)	2.6457513110646	1
382			(4,4,4)	(4,6,6)	(4,6,6)	2.6457513110646	1
820			(6,6,4)	(6,6,4)	(6,6,4)	2.6457513110646	1
742			(3,6,3,3)	(3,6,3,3)	(3,3,3,3,4)	2.6508463531453	1
297			(3,4,4)	(3,4,3,3)	(4,4,13)	2.6515160741604	1
654			(3,11,3,3)	(3,11,3,3)	(3,3,3,3,4)	2.6666816207973	1
971	(3,3,3)		(3,4,4)	(4,9,4)	(3,9,3,3)	2.6676222440029	1
918	(4,4,3)		(4,6,4)	(4,6,4)	(4,4,5)	2.6731774536620	1
505			(4,9,4)	(4,9,4)	(4,4,14)	2.6806856179205	2
587			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,9)	2.6806856179205	2
877	(4,4,3)		(3,4,4)	(3,13,3,3)	(4,13,4)	2.6826212153595	1
595			(4,14,4)	(3,14,3,3)	(3,4,3,3,3)	2.6877316605059	1
607			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,6)	2.6896083877261	1
909	(4,4,3)		(4,4,4)	(4,13,4)	(4,13,4)	2.6904446627268	1
302			(3,4,4)	(3,4,3,3)	(3,3,3,10)	2.6908523254729	1
655			(3,11,3,3)	(3,11,3,3)	(3,3,3,8)	2.7140911580449	1
623			(3,13,3,3)	(3,13,3,3)	(3,3,3,7)	2.7209323861516	1
89			(4,4,3)	(4,4,7)	(4,4,14)	2.7266529805352	1
596			(4,14,4)	(3,14,3,3)	(3,4,4,4)	2.7276400366935	1
447			(4,6,4)	(4,6,6)	(4,4,7)	2.7278379770076	1
374			(4,4,4)	(4,4,5)	(4,4,14)	2.7299587242784	1
558			(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,12)	2.7320508075689	2
543			(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,13)	2.7413157726280	2
573			(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,11)	2.7413157726280	2
715			(3,8,3,3)	(3,4,3,3)	(4,8,6)	2.7414408633281	1
489			(4,8,4)	(4,4,5)	(4,8,6)	2.7530644020744	1
95			(4,4,3)	(4,4,3,4)	(4,4,12)	2.7544391566384	1
103			(4,4,3)	(4,4,8)	(4,4,12)	2.7544391566384	1
639			(3,12,3,3)	(3,12,3,3)	(3,3,3,3,4)	2.7586170612811	1
743			(3,6,3,3)	(3,6,3,3)	(3,3,3,8)	2.7679854360425	1
522			(4,10,4)	(4,10,4)	(4,4,14)	2.7689260243409	2
588			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,10)	2.7689260243409	2

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
972		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	2.7771299239076	1
848		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 9)	2.7877065555154	1
895		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	2.7877065555154	1
640			(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	2.8024101782398	1
717			(3, 8, 3, 3)	(3, 6, 6)	(6, 8, 4)	2.8039135551837	1
196			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 9)	2.8089206080726	1
840		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	2.8115759993244	1
876		(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 14, 3, 3)	(4, 14, 4)	2.8133214489239	1
408			(4, 5, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 5, 3, 3, 3)	2.8157044444730	1
985		(3, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(6, 6, 3)	(3, 6, 6)	2.8219615378686	1
910		(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 14, 4)	(4, 14, 4)	2.8267134963794	1
608			(3, 14, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	2.8386279535405	1
559			(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	(4, 4, 13)	2.8455555838087	2
574			(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	(4, 4, 12)	2.8455555838087	2
921		(4, 4, 3)	(4, 7, 4)	(4, 7, 4)	(4, 4, 5)	2.8456275506930	1
624			(3, 13, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.8602248055588	1
544			(4, 11, 4)	(4, 11, 4)	(4, 4, 14)	2.8633186570491	2
589			(4, 14, 4)	(4, 14, 4)	(4, 4, 11)	2.8633186570491	2
692			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	2.8793852415718	4
739			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(6, 6, 5)	2.8904791588392	1
973		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 11, 4)	(3, 11, 3, 3)	2.8922652698884	1
949		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	2.8981832422992	1
372			(4, 4, 4)	(4, 4, 5)	(4, 4, 12)	2.8990706197284	1
672			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	2.8996945335464	1
625			(3, 13, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	2.9010350374439	1
707			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	2.9095575604770	1
993		(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(3, 4, 4)	(3, 6, 3, 3)	2.9164424557751	1
300			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 14)	2.9178695011618	1
52			(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	2.9230515883353	1
379			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 9)	2.9355086768250	1
108			(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	(4, 4, 11)	2.9388752603183	1
656			(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	2.9496798404562	1
575			(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	(4, 4, 13)	2.9547032923716	2
560			(4, 12, 4)	(4, 12, 4)	(4, 4, 14)	2.9632698404113	2
590			(4, 14, 4)	(4, 14, 4)	(4, 4, 12)	2.9632698404113	2
783			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 10)	2.9643819937277	1
609			(3, 14, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	2.9693491815190	1
469			(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	2.9704429770281	1
433			(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	2.9844187466970	1
803			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3, 4)	2.9844656411773	1
804			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 8)	2.9844656411773	1
487			(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	2.9943013877480	1
917		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(6, 6, 3)	(4, 6, 6)	2.9959403783533	1
922		(4, 4, 3)	(4, 7, 4)	(3, 7, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.0037313146328	1
98			(4, 4, 3)	(4, 8, 6)	(4, 8, 6)	3.0059164835259	
225			(6, 6, 3)	(6, 8, 4)	(6, 8, 4)	3.0059164835259	
317			(3, 4, 4)	(3, 6, 6)	(4, 6, 8)	3.0059164835259	
759			(3, 6, 3, 3)	(4, 6, 6)	(3, 4, 3, 4)	3.0069007107531	1
436			(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	(4, 6, 8)	3.0075039974212	1
610			(3, 14, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	3.0076253303879	1
923		(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(4, 8, 4)	(4, 4, 5)	3.0107307307977	1
271			(3, 4, 4)	(4, 10, 4)	(3, 10, 10)	3.012501486612	
512			(4, 10, 4)	(4, 10, 4)	(10, 10, 3)	3.012501486612	
114			(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	(4, 4, 10)	3.012501486612	
974		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 12, 4)	(3, 12, 3, 3)	3.0114630071868	1
641			(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	3.0191945607754	1
320			(3, 4, 4)	(4, 4, 6)	(3, 4, 3, 3, 3)	3.0219124213533	1
952		(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	3.0221088693172	1
919		(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(3, 6, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.0359236764270	1
925		(4, 4, 3)	(4, 8, 4)	(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.0376572056543	1
104			(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	(4, 4, 13)	3.0395458674220	1
96			(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 13)	3.0395458674220	1
510			(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	3.0406128553468	1
728			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	3.0421491577136	1
153			(3, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 10)	3.0536251376065	1
576			(4, 13, 4)	(4, 13, 4)	(4, 4, 14)	3.0682328973691	2
591			(4, 14, 4)	(4, 14, 4)	(4, 4, 13)	3.0682328973691	2
812			(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	3.0776835371753	
813			(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	3.0776835371753	
771			(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 5, 3, 5)	3.0776835371753	
409			(4, 5, 4)	(4, 4, 5)	(4, 5, 4, 3)	3.0776835371753	
406			(4, 5, 4)	(3, 5, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	3.0776835371753	
664			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(10, 10, 3)	3.0779794913125	1
756			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 6)	3.1014193772396	1
527			(4, 10, 4)	(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	3.1022333689989	1
626			(3, 13, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	3.1025939866372	1
927		(4, 4, 3)	(4, 9, 4)	(3, 9, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	3.1037123449773	1
747			(3, 6, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(5, 6, 6)	3.1057390536602	1
975		(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 13, 4)	(3, 13, 3, 3)	3.1337814307907	1
718			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 8)	(3, 3, 3, 4)	3.1473334750913	1
223			(6, 6, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6, 8)	3.1648222331528	1
926		(4, 4, 3)	(4, 9, 4)	(4, 9, 4)	(4, 4, 5)	3.1705435969993	1

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
549			(4,11,4)	(3,11,3,3)	(3,4,3,4)	3.1752881655088	1
592			(4,14,4)	(4,14,4)	(4,4,14)	3.1777090299530	2
929		(4,4,3)	(4,10,4)	(3,10,3,3)	(3,4,3,3)	3.1880095708549	1
673			(3,10,3,3)	(3,10,3,3)	(3,3,3,10)	3.1962266107498	4
611			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,9)	3.1964218161754	1
767			(3,5,3,3)	(3,5,3,3)	(3,3,3,3,4)	3.1967927412379	1
303			(3,4,4)	(3,4,3,3)	(3,3,3,11)	3.2050684011596	1
657			(3,11,3,3)	(3,11,3,3)	(3,3,3,10)	3.2147319873589	1
693			(3,9,3,3)	(3,9,3,3)	(3,3,3,10)	3.2225308856769	1
914		(4,4,3)	(4,5,4)	(3,5,3,3)	(3,4,3,3)	3.2464837087846	1
992		(6,6,3)	(6,6,3)	(3,6,3,3)	(3,6,6)	3.2498966514636	1
565			(4,12,4)	(3,12,3,3)	(3,4,5,4)	3.2574126702332	1
976		(3,3,3)	(3,4,4)	(4,14,4)	(3,14,3,3)	3.2586186907225	1
841		(4,4,3)	(4,4,3)	(3,4,4)	(3,4,4,4)	3.2600324466713	1
642			(3,12,3,3)	(3,12,3,3)	(3,3,3,10)	3.2610489499624	1
749			(3,6,3,3)	(3,4,3,3)	(4,6,8)	3.2665091810649	1
373			(4,4,4)	(4,4,5)	(4,4,13)	3.2776643282270	1
932		(4,4,3)	(4,11,4)	(3,11,3,3)	(3,4,3,3)	3.2838126010679	1
627			(3,13,3,3)	(3,13,3,3)	(3,3,3,10)	3.3262893451780	1
928		(4,4,3)	(4,10,4)	(4,10,4)	(4,4,5)	3.326373753150	1
708			(3,8,3,3)	(3,8,3,3)	(3,3,3,10)	3.3315611160724	1
581			(4,13,4)	(3,13,3,3)	(3,4,5,4)	3.3470238795663	1
109			(4,4,3)	(4,4,9)	(4,4,12)	3.3551333007487	1
97			(4,4,3)	(4,4,3,4)	(4,4,14)	3.3569185891987	1
105			(4,4,3)	(4,4,8)	(4,4,14)	3.3569185891987	1
28			(4,4,3)	(4,4,4)	(4,4,11)	3.3740249770952	1
528			(4,10,4)	(3,4,3,3)	(3,10,10)	3.3783801665753	1
934		(4,4,3)	(4,12,4)	(3,12,3,3)	(3,4,3,3)	3.3874613464742	1
612			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,10)	3.4052758290510	1
790			(3,4,3,3)	(4,4,5)	(3,4,3,3,3)	3.4094719757914	1
798			(3,4,3,3)	(3,4,3,4)	(3,3,3,4)	3.4142135623731	1
601			(8,8,3)	(3,8,8)	(3,8,8)	3.4142135623731	1
363			(4,4,4)	(3,4,3,3)	(3,4,5,4)	3.4169299300339	1
858		(4,4,3)	(4,4,3)	(4,8,4)	(4,8,6)	3.4265273530851	1
597			(4,14,4)	(3,14,3,3)	(3,4,5,4)	3.4429824427021	1
768			(3,5,3,3)	(3,5,3,3)	(3,3,3,8)	3.4559226858042	1
744			(3,6,3,3)	(3,6,3,3)	(3,3,3,9)	3.4608492818074	1
931		(4,4,3)	(4,11,4)	(4,11,4)	(4,4,5)	3.4791150115370	1
936		(4,4,3)	(4,13,4)	(3,13,3,3)	(3,4,3,3)	3.4967979219598	1
321			(3,4,4)	(4,4,6)	(3,4,4,4)	3.4989485116416	1
490			(4,4,4)	(4,4,6)	(4,8,6)	3.4989485116416	1
36			(4,4,3)	(4,6,4)	(4,6,8)	3.4989485116416	1
920		(4,4,3)	(4,6,4)	(6,6,4)	(4,6,4)	3.4989485116416	1
443			(4,6,4)	(6,6,4)	(4,6,8)	3.4989485116416	1
448			(4,6,4)	(4,6,6)	(4,4,3,4)	3.4989485116416	1
449			(4,6,4)	(4,6,6)	(4,4,8)	3.4989485116416	1
493			(4,8,4)	(4,6,6)	(6,8,4)	3.4989485116416	1
658			(3,11,3,3)	(3,11,3,3)	(3,3,3,11)	3.5133370916661	4
643			(3,12,3,3)	(3,12,3,3)	(3,3,3,11)	3.5303367694622	1
793			(3,4,3,3)	(3,3,3,3)	(3,4,3,3,3)	3.5328708957304	1
674			(3,10,3,3)	(3,10,3,3)	(3,3,3,11)	3.5366702220830	1
115			(4,4,3)	(4,4,10)	(4,4,11)	3.5607732600372	1
628			(3,13,3,3)	(3,13,3,3)	(3,3,3,11)	3.5734886632919	1
386			(4,4,4)	(4,4,7)	(4,4,3,4)	3.5992881444312	1
387			(4,4,4)	(4,4,7)	(4,4,8)	3.5992881444312	1
938		(4,4,3)	(4,14,4)	(3,14,3,3)	(3,4,3,3)	3.6104680637186	1
694			(3,9,3,3)	(3,9,3,3)	(3,3,3,11)	3.6293538989905	1
933		(4,4,3)	(4,12,4)	(4,12,4)	(4,4,5)	3.6294117816319	1
729			(3,7,3,3)	(3,7,3,3)	(3,3,3,10)	3.6316535189216	1
613			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,11)	3.6349459864691	1
849		(4,4,3)	(4,4,3)	(4,4,4)	(4,4,10)	3.6496014582307	1
896		(4,4,3)	(4,4,4)	(4,4,3)	(4,4,10)	3.6496014582307	1
755			(3,6,3,3)	(3,6,6)	(6,6,5)	3.6601715243672	1
822			(5,5,5)	(5,5,5)	(5,5,5)	3.7024591736438	1
935		(4,4,3)	(4,13,4)	(4,13,4)	(4,4,5)	3.7777477524888	1
329			(3,4,4)	(3,4,3,4)	(4,4,9)	3.7925682137340	1
644			(3,12,3,3)	(3,12,3,3)	(3,3,3,12)	3.8306487877702	4
188			(3,3,3)	(3,4,3,4)	(3,4,5,4)	3.8351276292321	1
380			(4,4,4)	(4,4,6)	(4,4,10)	3.8351276292321	1
348			(4,4,4)	(4,6,4)	(4,6,10)	3.8351276292321	1
354			(4,4,4)	(4,10,4)	(4,10,6)	3.8351276292321	1
428			(4,6,4)	(4,10,4)	(6,10,4)	3.8351276292321	1
629			(3,13,3,3)	(3,13,3,3)	(3,3,3,12)	3.8463719864744	1
659			(3,11,3,3)	(3,11,3,3)	(3,3,3,12)	3.8516243001061	1
709			(3,8,3,3)	(3,8,3,3)	(3,3,3,11)	3.8629962380490	1
785			(3,4,3,3)	(3,4,3,3)	(4,4,11)	3.8640188304379	1
110			(4,4,3)	(4,4,9)	(4,4,13)	3.8719444254389	1
197			(3,3,3)	(3,3,3,4)	(3,3,3,10)	3.8812778265187	1
770			(3,5,3,3)	(3,4,3,3)	(4,5,4,3)	3.8838954002377	1
614			(3,14,3,3)	(3,14,3,3)	(3,3,3,12)	3.8867653622366	1
276			(3,4,4)	(3,10,3,3)	(4,10,6)	3.9200106572748	1
304			(3,4,4)	(3,4,3,3)	(3,3,3,12)	3.9212492207810	1

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_e	Lem.
937		(4, 4, 3)	(4, 14, 4)	(4, 14, 4)	(4, 4, 5)	3.9244973796033	1
675			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 12)	3.9322817194762	1
208			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	4.0923274785571	1
681			(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 10, 10)	4.1082266495914	1
695			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 12)	4.1235203905997	1
630			(3, 13, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	4.1481149052794	4
615			(3, 14, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	4.1627417583771	1
645			(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	4.1671719573698	1
76			(4, 4, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6, 10)	4.1799684155505	1
631			(3, 13, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.1944569975304	1
616			(3, 14, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.2048729779278	1
791			(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 5)	(3, 4, 4, 4)	4.2050406497963	1
646			(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.2193194484501	1
679			(3, 10, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(6, 10, 4)	4.2338691077706	1
660			(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	4.2385995138432	1
661			(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.2994044548613	1
120			(4, 4, 3)	(4, 6, 8)	(4, 6, 8)	4.2994512875760	
322			(3, 4, 4)	(3, 8, 8)	(4, 8, 6)	4.2994512875760	
602			(8, 8, 3)	(6, 8, 4)	(6, 8, 4)	4.2994512875760	
116			(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	(4, 4, 12)	4.3356661142053	1
280			(3, 4, 4)	(3, 6, 3, 3)	(4, 6, 10)	4.3524093264436	1
676			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	4.4004568148186	1
787			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	4.4017590345476	1
911	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	4.4171336565434	1
943	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	4.4555997182913	1
870	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	(4, 4, 7)	4.4555997182913	1
617			(3, 14, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	4.4657021351903	4
758			(3, 6, 3, 3)	(3, 8, 8)	(6, 8, 4)	4.4756518375084	1
677			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.4757491778287	1
632			(3, 13, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	4.4831664009556	1
730			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 11)	4.4843305516578	1
805			(4, 4, 5)	(4, 4, 5)	(4, 4, 9)	4.5207789088127	1
121			(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	(4, 4, 11)	4.5321391717300	1
207			(3, 3, 3)	(3, 5, 3, 5)	(3, 5, 3, 5)	4.5345678844570	
111			(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	(4, 4, 14)	4.5463228637087	1
647			(3, 12, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	4.5472804667061	1
710			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 12)	4.5685324868646	1
745			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 10)	4.6411441917255	1
212			(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 5)	4.6435230050845	
817			(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 3, 3)	4.6435230050845	
818			(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 5)	4.6435230050845	
772			(3, 5, 3, 3)	(3, 6, 6)	(5, 6, 6)	4.6435230050845	
226			(6, 6, 3)	(6, 6, 5)	(6, 6, 5)	4.6435230050845	
988	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 5)	4.6435230050845	
1000	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	4.6435230050845	
662			(3, 11, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	4.6875875483766	1
807			(4, 4, 5)	(4, 4, 6)	(4, 4, 7)	4.7227240899738	1
696			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	4.7457254873464	1
983	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(8, 8, 3)	(3, 8, 3, 3)	4.8292880628923	1
697			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	4.8502701008646	1
794			(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	4.8847340418556	1
529			(4, 10, 4)	(4, 4, 5)	(4, 10, 6)	4.9173509014000	1
680			(3, 10, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 10, 6)	4.9433550798714	1
678			(3, 10, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	4.9690674238880	1
855	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 4)	(4, 6, 8)	5.0192038029992	1
451			(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	(4, 4, 9)	5.0206097151088	1
799			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(4, 4, 7)	5.0303491310606	1
305			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	5.0597194323143	1
446			(4, 6, 4)	(4, 4, 6)	(4, 6, 8)	5.1699054209297	
453			(4, 6, 4)	(6, 8, 4)	(4, 8, 6)	5.1699054209297	
494			(4, 8, 4)	(4, 4, 7)	(4, 8, 6)	5.1848401619278	1
33			(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4, 3)	5.2360679774998	
410			(4, 5, 4)	(5, 5, 5)	(4, 5, 4, 3)	5.2360679774998	
915	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(5, 5, 5)	(4, 5, 4)	5.2360679774998	
147			(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 5, 4)	5.2360679774998	
311			(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	(3, 4, 5, 4)	5.2360679774998	
977	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 4)	(4, 4, 5)	(3, 4, 4)	5.2360679774998	
306			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	5.2904045789883	1
682			(3, 10, 3, 3)	(3, 6, 6)	(6, 10, 4)	5.3062530270643	1
850	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 11)	5.4879074098064	1
897	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	5.4879074098064	1
450			(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	(6, 6, 5)	5.5151072396644	1
698			(3, 9, 3, 3)	(3, 9, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	5.5723735349233	1
117			(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	(4, 4, 13)	5.5824656754535	1
711			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	5.5888820510876	1
202			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	5.6979317307779	1
205			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 5)	(3, 3, 3, 7)	5.6979317307779	1
381			(4, 4, 4)	(4, 4, 6)	(4, 4, 11)	5.7577889539464	1
786			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 12)	5.7781181085086	1
712			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	5.7793964720045	1
384			(4, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	5.7874250218476	1
209			(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	5.7972326672579	1

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 2

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Radius R_c	Lem.
731			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 12)	5.9296903322034	1
769			(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	5.9609878922797	1
413			(4, 5, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 5, 3, 5)	6.0735939788562	
809			(4, 4, 5)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 4)	6.0735939788562	
990		(6, 6, 3)	(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	6.1632933762333	1
122			(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	(4, 4, 12)	6.4589364737097	1
757			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 6)	(3, 3, 3, 7)	6.5752441912204	1
124			(4, 4, 3)	(4, 5, 4, 3)	(4, 5, 4, 3)	6.7350337619791	
315			(3, 4, 4)	(3, 3, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	6.7350337619791	
719			(3, 8, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(4, 8, 6)	6.8024304626517	1
224			(6, 6, 3)	(4, 6, 6)	(4, 6, 10)	6.8819096023559	1
198			(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 4)	(3, 3, 3, 11)	7.1240837963332	1
713			(3, 8, 3, 3)	(3, 8, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	7.3136775978926	1
307			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	7.4716542720927	1
819			(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	(6, 6, 5)	7.5796338776189	
227			(6, 6, 3)	(5, 6, 6)	(5, 6, 6)	7.5796338776189	
746			(3, 6, 3, 3)	(3, 6, 3, 3)	(3, 3, 3, 11)	7.6902927103646	1
388			(4, 4, 4)	(4, 4, 7)	(4, 4, 9)	7.6919252468704	1
796			(3, 4, 3, 3)	(3, 6, 6)	(4, 6, 8)	7.8608091906108	1
852		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 5, 4)	(4, 5, 4, 3)	7.9843439059462	1
978		(3, 3, 3)	(3, 14, 3, 3)	(4, 14, 4)	(3, 4, 3, 3)	8.1775075030370	1
206			(3, 3, 3)	(3, 10, 10)	(3, 10, 10)	8.2183343605926	
823			(10, 10, 3)	(10, 10, 3)	(10, 10, 3)	8.2183343605926	
492			(4, 8, 4)	(3, 8, 8)	(3, 4, 3, 3, 3)	8.2340994272626	1
118			(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	(4, 4, 14)	8.2755734614735	1
411			(4, 5, 4)	(4, 4, 6)	(4, 5, 4, 3)	8.2789503961853	
216			(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 10)	8.2789503961853	1
441			(4, 6, 4)	(3, 6, 6)	(3, 4, 5, 4)	8.2789503961853	
437			(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	(4, 6, 10)	8.2789503961853	1
995		(6, 6, 3)	(4, 6, 4)	(4, 4, 5)	(4, 6, 4)	8.2789503961853	
683			(3, 10, 3, 3)	(10, 10, 3)	(3, 10, 10)	8.5228288302125	1
979		(3, 3, 3)	(3, 13, 3, 3)	(4, 13, 4)	(3, 4, 3, 3)	8.5511717736642	1
412			(4, 5, 4)	(4, 6, 6)	(5, 6, 6)	9.1241012486160	
821			(6, 6, 4)	(6, 6, 4)	(6, 6, 5)	9.1241012486160	
808			(4, 4, 5)	(4, 6, 6)	(4, 6, 6)	9.1241012486160	
980		(3, 3, 3)	(3, 12, 3, 3)	(4, 12, 4)	(3, 4, 3, 3)	9.2399423256455	1
732			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	9.5671506353565	1
43			(4, 4, 3)	(4, 10, 4)	(4, 10, 6)	9.7446101783240	1
930		(4, 4, 3)	(4, 10, 4)	(10, 10, 3)	(4, 10, 4)	9.7446101783240	
530			(4, 10, 4)	(10, 10, 3)	(4, 10, 6)	9.7446101783240	1
533			(4, 10, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 10, 10)	9.7446101783240	
330			(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(4, 4, 10)	9.7446101783240	
940		(4, 4, 3)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	10.3323112613055	1
981		(3, 3, 3)	(3, 11, 3, 3)	(4, 11, 4)	(3, 4, 3, 3)	10.6923891658005	1
733			(3, 7, 3, 3)	(3, 7, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	10.7510003490968	1
125			(4, 4, 3)	(4, 10, 6)	(4, 10, 6)	11.2521066192067	
228			(6, 6, 3)	(6, 10, 4)	(6, 10, 4)	11.2521066192067	
318			(3, 4, 4)	(3, 6, 6)	(4, 6, 10)	11.2521066192067	
861		(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 10, 4)	(4, 10, 6)	12.600607725518	1
531			(4, 10, 4)	(4, 4, 6)	(4, 10, 6)	12.7866511327240	
532			(4, 10, 4)	(4, 6, 6)	(6, 10, 4)	12.7866511327240	
444			(4, 6, 4)	(6, 6, 4)	(4, 6, 10)	12.7866511327240	
452			(4, 6, 4)	(4, 6, 6)	(4, 4, 10)	12.7866511327240	
982		(3, 3, 3)	(3, 10, 3, 3)	(4, 10, 4)	(3, 4, 3, 3)	15.2963987852038	1
123			(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	(4, 4, 13)	16.6057375885695	1
788			(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3)	(4, 4, 13)	63.2175936947309	1
4			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 6)	∞	-
29			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 12)	∞	-
5			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 7)	nicht existent	-
6			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3, 4)	nicht existent	-
7			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 8)	nicht existent	-
8			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 9)	nicht existent	-
9			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 10)	nicht existent	-
10			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 11)	nicht existent	-
11			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 12)	nicht existent	-
12			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 13)	nicht existent	-
13			(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	(4, 4, 14)	nicht existent	-
19			(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	(3, 4, 5, 4)	nicht existent	-
30			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 13)	nicht existent	-
31			(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	(4, 4, 14)	nicht existent	-
37			(4, 4, 3)	(4, 6, 4)	(4, 6, 10)	nicht existent	-
131			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 6)	nicht existent	-
132			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 7)	nicht existent	-
133			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	nicht existent	-
134			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 8)	nicht existent	-
135			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 9)	nicht existent	-
136			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 10)	nicht existent	-
137			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 11)	nicht existent	-
138			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 12)	nicht existent	-
139			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 13)	nicht existent	-
140			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	nicht existent	-
141			(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3, 14)	nicht existent	-

Anhang B

Computerunterstützte Berechnungen

„So seltsam es auch klingen mag, die Stärke der Mathematik beruht auf dem Vermeiden jeder unnötigen Annahme und auf ihrer großartigen Einsparung an Denkarbeit.“

Ernst Mach

B.1 Berechnung des schrägen Dodekaeders

Die Berechnungen der Keilwinkel des schrägen Dodekaeders (ab Seite 20) wurden mit Mathematica 4.0 durchgeführt und sind im Folgenden abgebildet.

```
In[1] :=  $\tau = (\text{Sqrt}[5] - 1)/2;$   
 $p1 = \{0, \tau, 1 + \tau\}; p2 = \{0, -\tau, 1 + \tau\}; p3 = \{-1, -1, 1\};$   
 $p4 = \{-1 - \tau, 0, \tau\}; p5 = \{-1, 1, 1\}; p6 = \{1, -1, 1\};$   
 $p7 = \{1 + \tau, 0, \tau\}; p8 = \{1, 1, 1\}; p9 = \{\tau, 1 + \tau, 0\};$   
 $p10 = \{-\tau, 1 + \tau, 0\}; o1 = (p1 + p2 + p3 + p4 + p5)/5;$   
 $o2 = (p1 + p2 + p6 + p7 + p8)/5;$   
 $o3 = (p1 + p5 + p8 + p9 + p10)/5;$   
 $e1 = p1 - o1; e2 = p2 - o1; e5 = p5 - o1; f1 = p1 - o2;$   
 $f2 = p2 - o2; f3 = p6 - o2; g1 = p1 - o3; g2 = p8 - o3;$   
 $A1 = o1 + xe1 + ye5; B1 = o1 + xe2 + ye1;$   
 $C1 = o2 + xf1 + yf2; D1 = o2 + xf2 + yf3;$   
 $E1 = o3 + xg1 + yg2; F1 = (A1 + B1)/2;$   
 $G1 = (A1 + C1)/2; H1 = (B1 + C1)/2;$   
 $k1 = (B1 - A1).(B1 - A1); k2 = (C1 - A1).(C1 - A1);$   
 $k3 = (C1 - B1).(C1 - B1);$ 
```

In[2] := Solve[k1 == k2, x]

Out[2] := $\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{6+2\sqrt{5}-21y+9\sqrt{5}y-\sqrt{80-90y^2+30\sqrt{5}y^2}}{2(-12+6\sqrt{5})} \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ x \rightarrow \frac{6+2\sqrt{5}-21y+9\sqrt{5}y+\sqrt{80-90y^2+30\sqrt{5}y^2}}{2(-12+6\sqrt{5})} \right\} \right\}$

In[3] := Solve[k1 == k3, x]

Out[3] := $\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{3+\sqrt{5}+2y-\sqrt{5}y-\sqrt{5}\sqrt{6y+2\sqrt{5}y-y^2-2\sqrt{5}y^2}}{3+\sqrt{5}} \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ x \rightarrow \frac{3+\sqrt{5}+2y-\sqrt{5}y+\sqrt{5}\sqrt{6y+2\sqrt{5}y-y^2-2\sqrt{5}y^2}}{3+\sqrt{5}} \right\} \right\}$

In[4] := N[Solve[$\frac{6+2\sqrt{5}-21y+9\sqrt{5}y-\sqrt{80-90y^2+30\sqrt{5}y^2}}{2(-12+6\sqrt{5})} ==$
 $\frac{3+\sqrt{5}+2y-\sqrt{5}y-\sqrt{5}\sqrt{6y+2\sqrt{5}y-y^2-2\sqrt{5}y^2}}{3+\sqrt{5}}$, y], 100]

Out[4] := $\{ \{ y \rightarrow 0.13402659372916743227782960821444022660405$
 $17251054980591663419897359721178280420043712963$
 $218903187242 \},$
 $\{ y \rightarrow -0.3326929090419962869908236321308096692839$
 $81293507959536817716067300583508128143740876435$
 $7225057652419 -$
 $2.878616290432386706131985015041297709916926095$
 $85257662096820106650302507290752138981325080348$
 $8507507 \text{ i} \},$
 $\{ y \rightarrow -0.3326929090419962869908236321308096692839$
 $81293507959536817716067300583508128143740876435$
 $7225057652419 +$
 $2.878616290432386706131985015041297709916926095$
 $85257662096820106650302507290752138981325080348$
 $8507507 \text{ i} \},$

In[5] := N[Solve[$\frac{6+2\sqrt{5}-21y+9\sqrt{5}y+\sqrt{80-90y^2+30\sqrt{5}y^2}}{2(-12+6\sqrt{5})} ==$
 $\frac{3+\sqrt{5}+2y-\sqrt{5}y-\sqrt{5}\sqrt{6y+2\sqrt{5}y-y^2-2\sqrt{5}y^2}}{3+\sqrt{5}}$, y], 100]

Out[5] := {}

$$\text{In}[6] := \text{N}[\text{Solve}\left[\frac{6+2\sqrt{5}-21y+9\sqrt{5}y-\sqrt{80-90y^2+30\sqrt{5}y^2}}{2(-12+6\sqrt{5})} == \frac{3+\sqrt{5}+2y-\sqrt{5}y+\sqrt{5}\sqrt{6y+2\sqrt{5}y-y^2-2\sqrt{5}y^2}}{3+\sqrt{5}}, y\right], 100]$$

$$\text{Out}[6] := \left\{\left\{y \rightarrow -1.618033988749894848204586834365638117720309179805762862135448622705260462818902449707207204189391137\right\}\right\}$$

$$\text{In}[7] := \text{N}[\text{Solve}\left[\frac{6+2\sqrt{5}-21y+9\sqrt{5}y+\sqrt{80-90y^2+30\sqrt{5}y^2}}{2(-12+6\sqrt{5})} == \frac{3+\sqrt{5}+2y-\sqrt{5}y+\sqrt{5}\sqrt{6y+2\sqrt{5}y-y^2-2\sqrt{5}y^2}}{3+\sqrt{5}}, y\right], 100]$$

$$\text{Out}[7] := \{\}$$

$$\text{In}[8] := y = 0.1340265937291674322778296082144402266040517251054980591663419897359721178280420043712963218903187242; \quad x = \frac{6+2\sqrt{5}-21y+9\sqrt{5}y-\sqrt{80-90y^2+30\sqrt{5}y^2}}{2(-12+6\sqrt{5})}$$

$$\text{Out}[8] := 0.506062546966018333299723307853480119741190264459834835327003756779251289361477652767028922165541522$$

$$\text{In}[9] := y = 0.1340265937291674322778296082144402266040517251054980591663419897359721178280420043712963218903187242; \quad x = \frac{3+\sqrt{5}+2y-\sqrt{5}y-\sqrt{5}\sqrt{6y+2\sqrt{5}y-y^2-2\sqrt{5}y^2}}{3+\sqrt{5}}$$

$$\text{Out}[9] := 0.506062546966018333299723307853480119741190264459834835327003756779251289361477652767028922165541522$$

$$\text{In}[10] := \gamma = \frac{\text{ArcCos}[(\text{o1} - \text{F1}).(\text{C1} - \text{F1})]}{(\text{Sqrt}[(\text{o1} - \text{F1}).(\text{o1} - \text{F1})]\text{Sqrt}[(\text{C1} - \text{F1}).(\text{C1} - \text{F1})])}$$

$$\text{Out}[10] := 2.66913063362575610770794093571820823051870374535538027422350272604007472919064837688916507865856045$$

$$\text{In}[11] := \alpha = \frac{\text{ArcCos}[(\text{A1} - \text{H1}).(\text{D1} - \text{H1})]}{(\text{Sqrt}[(\text{A1} - \text{H1}).(\text{A1} - \text{H1})]\text{Sqrt}[(\text{D1} - \text{H1}).(\text{D1} - \text{H1})])}$$

```
Out[11] := 2.86540068834472860760460734173365691411900967266
           52379690599285252203586983434290185728878061257
           2036
```

```
In[12] :=  $\beta = \text{ArcCos}[\frac{((B1 - G1).(E1 - G1))}{(\text{Sqrt}[(B1 - G1).(B1 - G1)]\text{Sqrt}[(E1 - G1).(E1 - G1)])}]$ 
```

```
Out[12] := 2.86540068834472860760460734173365691411900967266
           52379690599285252203586983434290185728878061257
           2036
```

In In[1] werden die Daten des Gleichungssystems eingegeben. In[2] und [3] lösen die Bedingungen, dass die Kanten k_1 , k_2 und k_3 gleich lang sein sollen. Aus beiden Bedingungen folgen jeweils zwei Lösungen für x (siehe Out[2] und [3]). In In[4] bis [7] werden diese systematisch gleichgesetzt, um y zu erhalten: Aus der ersten Lösung von [2] und der ersten aus [3] folgen drei mögliche y ; ein reelles und zwei komplex konjugierte. Aus der zweiten von [2] und der ersten aus [3] folgt kein mögliches y . Die erste Lösung von [2] zusammen mit dem zweiten x von [3] ergibt ein mögliches $y > 1$. Und das jeweils zweite x von [2] und [3] ergibt ebenfalls kein mögliches y .

Nun ist es in der Natur des Problems, dass y auf jeden Fall reell und außerdem kleiner als 1 sein muss. Es kommt also für y nur die erste Lösung aus Out[4] in Frage. Mithin können wir x mit der ersten Lösung aus Out[2] oder mit der ersten Lösung aus Out[3] bestimmen. In beiden Fällen (Out[8] und [9]) bekommen wir natürlich den gleichen Wert für x .

Mit den errechneten x und y können wir nun die Keilwinkel γ zwischen 3-Eck und 5-Eck und die Keilwinkel α und β zwischen jeweils zwei 3-Ecken im schrägen Dodekaeder bestimmen (Out[10] bis [12]). Es zeigt sich – wie erwartet – die Gleichheit der Winkel α und β .

B.2 Radien-Programm

Dieses Programm dient dazu, mit Hilfe eines manuellen Iterationsverfahrens die Faltwinkel und Radien einer Kantenumgebung mit (drei,) vier bzw. fünf Zellen zu bestimmen. Dazu müssen die Daten (Flächenradien r , Keilwinkel kw , Zellradien zu den Ecken R und zu den Flächenmittelpunkten R_f) definiert werden. Mit einem Startwert für φ_{12} bekommen wir die anderen Faltwinkel und dazugehörige Radien. Nun muss φ_{12} so verändert werden, dass sich die Radien annähern. Dass es einen Winkel gibt, bei dem alle Radien (zumindest theoretisch) gleich sind, wird im Anschluss auf Seite 176 geklärt.

Diese Iteration lässt sich in Mathematica sicher automatisieren; hier soll der Kürze halber nur die Datendefinition und die jeweiligen Berechnungen für drei, vier und fünf Zellen pro Kante angegeben werden. Dabei werden die Keilwinkel des schrägen Dodekaeders aus den vorherigen Berechnungen (ab Seite 153) numerisch genähert übernommen; sollen die Berechnungen hier genauer sein, so müssen diese Daten auch genauer berechnet werden.

$$\text{In}[1] := \text{r}[n_] := \frac{\text{Cot}[\frac{\pi}{n}]}{2};$$

(* Flächeninnenradien für n - Eck mit Kantenlänge 1 *)

$$y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} - \frac{1}{3} \sqrt[3]{-17 + 3\sqrt{33}} - \frac{1}{3}; \quad x = \frac{1-y}{1+y};$$

(* Variablen für Keilwinkel des schrägen Hexaeders *)

$$\text{kw} := \left\{ \frac{\pi}{3}, \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[\pi/3] - (\text{Cos}[\pi/3])^2}{(\text{Sin}[\pi/3])^2}\right], \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[\pi/3] - (\text{Cos}[\pi/3])^2}{(\text{Sin}[\pi/3])^2}\right], \right.$$

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/14] - 1/\text{Tan}[\pi/14]}{\sqrt{3}}\right],$$

$$\frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/13] - 1/\text{Tan}[\pi/13]}{\sqrt{3}}\right],$$

$$\frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/12] - 1/\text{Tan}[\pi/12]}{\sqrt{3}}\right], \quad \frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/11] - 1/\text{Tan}[\pi/11]}{\sqrt{3}}\right],$$

$$\frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/10] - 1/\text{Tan}[\pi/10]}{\sqrt{3}}\right], \quad \frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/9] - 1/\text{Tan}[\pi/9]}{\sqrt{3}}\right],$$

$$\frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/8] - 1/\text{Tan}[\pi/8]}{\sqrt{3}}\right], \quad \frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/7] - 1/\text{Tan}[\pi/7]}{\sqrt{3}}\right],$$

$$\frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/6] - 1/\text{Tan}[\pi/6]}{\sqrt{3}}\right], \quad \frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/5] - 1/\text{Tan}[\pi/5]}{\sqrt{3}}\right],$$

$$\frac{\pi}{2} + \text{ArcSin}\left[\frac{1/\text{Sin}[\pi/4] - 1/\text{Tan}[\pi/4]}{\sqrt{3}}\right], \quad \frac{3\pi}{5}, \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[2\pi/3] - \text{Cos}[2\pi/3] \text{Cos}[\pi/3]}{\text{Sin}[2\pi/3] \text{Sin}[\pi/3]}\right],$$

$$\text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[2\pi/3] - \text{Cos}[2\pi/3] \text{Cos}[\pi/3]}{\text{Sin}[2\pi/3] \text{Sin}[\pi/3]}\right], \quad \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[2\pi/3] - \text{Cos}[2\pi/3] \text{Cos}[\pi/3]}{\text{Sin}[2\pi/3] \text{Sin}[\pi/3]}\right],$$

$$\text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[3\pi/5] - (\text{Cos}[3\pi/5])^2}{(\text{Sin}[3\pi/5])^2}\right], \quad \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[3\pi/5] - (\text{Cos}[3\pi/5])^2}{(\text{Sin}[3\pi/5])^2}\right], \quad \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[2\pi/3] - \text{Cos}[2\pi/3] \text{Cos}[\pi/2]}{\text{Sin}[2\pi/3] \text{Sin}[\pi/2]}\right], \quad \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[2\pi/3] - \text{Cos}[2\pi/3] \text{Cos}[\pi/2]}{\text{Sin}[2\pi/3] \text{Sin}[\pi/2]}\right],$$

$$\begin{aligned}
& \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[2\pi/3]-\text{Cos}[2\pi/3]\text{Cos}[\pi/2]}{\text{Sin}[2\pi/3]\text{Sin}[\pi/2]}\right], \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[2\pi/3]-\text{Cos}[2\pi/3]\text{Cos}[\pi/2]}{\text{Sin}[2\pi/3]\text{Sin}[\pi/2]}\right], \\
& 2\text{ArcCos}\left[\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\text{Cos}\left[\frac{\pi}{4}\right]}\right], \frac{5\pi}{7}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, 2\text{ArcCos}\left[\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\text{Cos}\left[\frac{\pi}{5}\right]}\right], \\
& 2\text{ArcCos}\left[\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\text{Cos}\left[\frac{\pi}{5}\right]}\right], 2\text{ArcCos}\left[\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\text{Cos}\left[\frac{\pi}{5}\right]}\right], \frac{7\pi}{9}, \\
& \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[4\pi/5]-\text{Cos}[\pi/3]\text{Cos}[4\pi/5]}{\text{Sin}[\pi/3]\text{Sin}[4\pi/5]}\right], \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[4\pi/5]-\text{Cos}[\pi/3]\text{Cos}[4\pi/5]}{\text{Sin}[\pi/3]\text{Sin}[4\pi/5]}\right], \\
& \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[4\pi/5]-\text{Cos}[\pi/3]\text{Cos}[4\pi/5]}{\text{Sin}[\pi/3]\text{Sin}[4\pi/5]}\right], \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[4\pi/5]-\text{Cos}[\pi/3]\text{Cos}[4\pi/5]}{\text{Sin}[\pi/3]\text{Sin}[4\pi/5]}\right], \\
& \text{ArcCos}\left[\frac{2x^2+(-1+y)y-x(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4+5x^2-6y+3y^2-2x(1+y)}}\right], \frac{4\pi}{5}, \\
& \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[3\pi/4]-\text{Cos}[\pi/2]\text{Cos}[2\pi/3]}{\text{Sin}[\pi/2]\text{Sin}[2\pi/3]}\right], \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[3\pi/4]-\text{Cos}[\pi/2]\text{Cos}[2\pi/3]}{\text{Sin}[\pi/2]\text{Sin}[2\pi/3]}\right], \\
& 2\text{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\text{Cos}\left[\frac{\pi}{6}\right]}\right], \frac{9\pi}{11}, \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[2\pi/3]-\text{Cos}[\pi/2]\text{Cos}[4\pi/5]}{\text{Sin}[\pi/2]\text{Sin}[4\pi/5]}\right], \\
& \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[2\pi/3]-\text{Cos}[\pi/2]\text{Cos}[4\pi/5]}{\text{Sin}[\pi/2]\text{Sin}[4\pi/5]}\right], \frac{5\pi}{6}, 2\text{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\text{Cos}\left[\frac{\pi}{7}\right]}\right], \\
& \frac{11\pi}{13}, 2.66913063362575610770794093571820823051870374\backslash \\
& 5355380274223502726040074729190648376889165078658\backslash \\
& 5604521180011078861291103473450461654553157372638\backslash \\
& 7022784771666649964077971721294235276321963276619\backslash \\
& 83392559151161728847'197.27756566709718, \\
& \text{ArcCos}\left[-\frac{1+2x(-1+y)+y^2}{1+2x^2+3y^2-2x(1+y)}\right], 2\text{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\text{Cos}\left[\frac{\pi}{8}\right]}\right], \frac{6\pi}{7}, \\
& 2\text{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\text{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right]}\right], \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[4\pi/5]-\text{Cos}[\pi/2]\text{Cos}[2\pi/3]}{\text{Sin}[\pi/2]\text{Sin}[2\pi/3]}\right], \\
& \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[4\pi/5]-\text{Cos}[\pi/2]\text{Cos}[2\pi/3]}{\text{Sin}[\pi/2]\text{Sin}[2\pi/3]}\right], 2\text{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\text{Cos}\left[\frac{\pi}{10}\right]}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{Cos}\left[\frac{\pi}{11}\right]}\right], 2 \operatorname{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{Cos}\left[\frac{\pi}{12}\right]}\right], \\
& 2 \operatorname{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{Cos}\left[\frac{\pi}{13}\right]}\right], 2.86540068834472860760460734 \backslash \\
& 1733656914119009672665237969059928525220358698343 \backslash \\
& 4290185728878061257203608061391961394155640788392 \backslash \\
& 5848398374792504243232782807726076187711715723431 \backslash \\
& 0315613846289701310947527205916568394'196.99279476 \backslash \\
& 740352, 2 \operatorname{ArcSin}\left[\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{Cos}\left[\frac{\pi}{14}\right]}\right]
\end{aligned}$$

(* Keilwinkel der 75 Zellen *)

$$\begin{aligned}
R := & \left\{ \sqrt{r[3]^2 + (r[3] \operatorname{Sin}[kw[[2]]] - \frac{r[3]-r[3] \operatorname{Cos}[kw[[2]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[2]]]})^2 + \frac{1}{4}}, \right. \\
& \sqrt{r[4]^2 + (r[4] \operatorname{Sin}[kw[[5]]] - \frac{r[4]-r[4] \operatorname{Cos}[kw[[5]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[5]]]})^2 + \frac{1}{4}}, \\
& \sqrt{r[5]^2 + (r[5] \operatorname{Sin}[kw[[32]]] - \frac{r[5]-r[5] \operatorname{Cos}[kw[[32]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[32]]]})^2 + \frac{1}{4}}, \\
& \sqrt{r[3]^2 + (r[3] \operatorname{Sin}[kw[[29]]] - \frac{r[3]-r[3] \operatorname{Cos}[kw[[29]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[29]]]})^2 + \frac{1}{4}}, \\
& \sqrt{r[3]^2 + (r[3] \operatorname{Sin}[kw[[44]]] - \frac{r[3]-r[3] \operatorname{Cos}[kw[[44]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[44]]]})^2 + \frac{1}{4}}, \\
& \sqrt{r[3]^2 + (r[6] \operatorname{Sin}[kw[[30]]] - \frac{r[3]-r[6] \operatorname{Cos}[kw[[30]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[30]]]})^2 + \frac{1}{4}}, \\
& \sqrt{r[3]^2 + (r[8] \operatorname{Sin}[kw[[35]]] - \frac{r[3]-r[8] \operatorname{Cos}[kw[[35]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[35]]]})^2 + \frac{1}{4}}, \\
& \sqrt{r[3]^2 + (r[10] \operatorname{Sin}[kw[[48]]] - \frac{r[3]-r[10] \operatorname{Cos}[kw[[48]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[48]]]})^2 + \frac{1}{4}}, \\
& \left. \sqrt{r[4]^2 + (r[6] \operatorname{Sin}[kw[[36]]] - \frac{r[4]-r[6] \operatorname{Cos}[kw[[36]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[36]]]})^2 + \frac{1}{4}}, \right\}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{r[5]^2 + (r[6] \operatorname{Sin}[kw[[49]]] - \frac{r[5] - r[6] \operatorname{Cos}[kw[[49]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[49]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[6] \operatorname{Sin}[kw[[55]]] - \frac{r[4] - r[6] \operatorname{Cos}[kw[[55]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[55]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[6] \operatorname{Sin}[kw[[68]]] - \frac{r[4] - r[6] \operatorname{Cos}[kw[[68]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[68]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[4] \operatorname{Sin}[kw[[37]]] - \frac{r[3] - r[4] \operatorname{Cos}[kw[[37]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[37]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[5] \operatorname{Sin}[kw[[50]]] - \frac{r[3] - r[5] \operatorname{Cos}[kw[[50]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[50]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[4] \operatorname{Sin}[kw[[54]]] - \frac{r[3] - r[4] \operatorname{Cos}[kw[[54]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[54]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[4] \operatorname{Sin}[kw[[69]]] - \frac{r[3] - r[4] \operatorname{Cos}[kw[[69]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[69]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \operatorname{Sin}[kw[[64]]] - \frac{r[3] - r[3] \operatorname{Cos}[kw[[64]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[64]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \operatorname{Sin}[kw[[74]]] - \frac{r[3] - r[3] \operatorname{Cos}[kw[[74]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[74]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[4] \operatorname{Sin}[kw[[4]]] - \frac{r[3] - r[4] \operatorname{Cos}[kw[[4]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[4]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[5] \operatorname{Sin}[kw[[6]]] - \frac{r[4] - r[5] \operatorname{Cos}[kw[[6]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[6]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[6] \operatorname{Sin}[kw[[7]]] - \frac{r[4] - r[6] \operatorname{Cos}[kw[[7]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[7]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[7] \operatorname{Sin}[kw[[8]]] - \frac{r[4] - r[7] \operatorname{Cos}[kw[[8]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[5]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[8] \operatorname{Sin}[kw[[9]]] - \frac{r[4] - r[8] \operatorname{Cos}[kw[[9]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[9]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[9] \operatorname{Sin}[kw[[10]]] - \frac{r[4] - r[9] \operatorname{Cos}[kw[[10]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[10]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[10] \operatorname{Sin}[kw[[11]]] - \frac{r[4] - r[10] \operatorname{Cos}[kw[[11]]]}{\operatorname{Tan}[kw[[11]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[11] \sin[kw[[12]]] - \frac{r[4]-r[11] \cos[kw[[12]]]}{\tan[kw[[12]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[12] \sin[kw[[13]]] - \frac{r[4]-r[12] \cos[kw[[13]]]}{\tan[kw[[13]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[13] \sin[kw[[14]]] - \frac{r[4]-r[13] \cos[kw[[14]]]}{\tan[kw[[14]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[4]^2 + (r[14] \sin[kw[[15]]] - \frac{r[4]-r[14] \cos[kw[[15]]]}{\tan[kw[[15]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[39]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[39]]]}{\tan[kw[[39]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[45]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[45]]]}{\tan[kw[[45]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[56]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[56]]]}{\tan[kw[[56]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[61]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[61]]]}{\tan[kw[[61]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[65]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[65]]]}{\tan[kw[[65]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[67]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[67]]]}{\tan[kw[[67]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[70]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[70]]]}{\tan[kw[[70]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[71]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[71]]]}{\tan[kw[[71]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[72]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[72]]]}{\tan[kw[[72]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[73]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[73]]]}{\tan[kw[[73]]]})^2 + \frac{1}{4}},$$

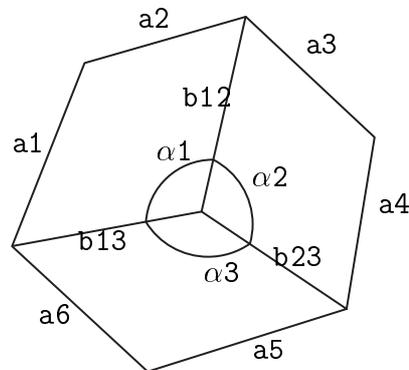
$$\sqrt{r[3]^2 + (r[3] \sin[kw[[75]]] - \frac{r[3]-r[3] \cos[kw[[75]]]}{\tan[kw[[75]]]})^2 + \frac{1}{4}};$$

(* Außenradien der Zellen *)

$$\text{Rf}[n_-, p_-] := \sqrt{(\text{R}[[n]])^2 - \frac{1}{4}(\text{Csc}[\frac{\pi}{p}])^2};$$

(* Innenradius zum Mittelpunkt des p -Ecks in der
Zelle n *)

Nun folgen die Definitionen für eine 3-, eine 4- und eine 5-Kantenkombination mit anschließendem Ergebnis der Iteration für eine Genauigkeit von 20 Nachkommastellen beispielhaft an drei Kantenkombinationen.



In[2] := (* z.B. Kantenkombination (333)(3434)(3454) *)

$$\alpha_1 = \text{kw}[[2]]; \alpha_2 = \text{kw}[[37]]; \alpha_3 = \text{kw}[[69]];$$

$$a_1 = \text{Rf}[1, 3]; a_2 = \text{Rf}[1, 3]; a_3 = \text{Rf}[13, 3]; a_4 = \text{Rf}[13, 4];$$

$$a_5 = \text{Rf}[16, 4]; a_6 = \text{Rf}[16, 3];$$

$$b_{12} = \text{r}[3]; b_{23} = \text{r}[4]; b_{13} = \text{r}[3];$$

$$\text{In}[3] := \varphi_{12} := \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[\alpha_3] - \text{Cos}[\alpha_1] \text{Cos}[\alpha_2]}{\text{Sin}[\alpha_1] \text{Sin}[\alpha_2]}\right];$$

$$\varphi_{13} := \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[\alpha_2] - \text{Cos}[\alpha_1] \text{Cos}[\alpha_3]}{\text{Sin}[\alpha_1] \text{Sin}[\alpha_3]}\right];$$

$$\varphi_{23} := \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[\alpha_1] - \text{Cos}[\alpha_2] \text{Cos}[\alpha_3]}{\text{Sin}[\alpha_2] \text{Sin}[\alpha_3]}\right];$$

$$S12 := \sqrt{\left(a3 \sin[\varphi12] - \frac{a2 - a3 \cos[\varphi12]}{\tan[\varphi12]}\right)^2 + (a2)^2 + (b12)^2 + \frac{1}{4}}$$

$$S23 := \sqrt{\left(a4 \sin[\varphi23] - \frac{a5 - a4 \cos[\varphi23]}{\tan[\varphi23]}\right)^2 + (a5)^2 + (b23)^2 + \frac{1}{4}}$$

$$S12 := \sqrt{\left(a6 \sin[\varphi13] - \frac{a1 - a6 \cos[\varphi13]}{\tan[\varphi13]}\right)^2 + (a1)^2 + (b13)^2 + \frac{1}{4}}$$

N[φ12, 20]

N[S12, 20]

N[S23, 20]

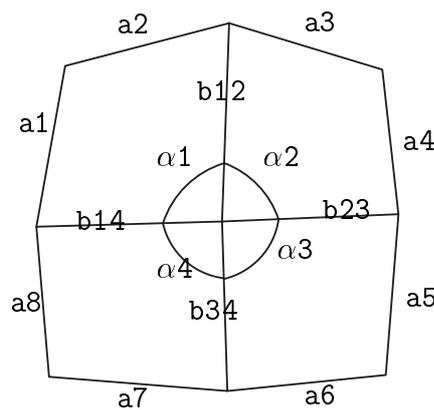
N[S13, 20]

Out[4] := 2.8706741331335730189

3.8351276292320923344

3.8351276292320923344

3.8351276292320923344



In[5] := (* z.B. Kantenkombination (443)(484)(3833)(3433) *)

α1 = kw[[1]]; α2 = kw[[9]]; α3 = kw[[23]]; α4 = kw[[27]];

$$a1 = \text{Rf}[19, 4]; a2 = \text{Rf}[19, 4]; a3 = \text{Rf}[23, 4]; a4 = \text{Rf}[23, 8];$$

$$a5 = \text{Rf}[34, 8]; a6 = \text{Rf}[34, 3]; a7 = \text{Rf}[30, 3]; a8 = \text{Rf}[30, 4];$$

$$b12 = r[4]; b23 = r[8]; b34 = r[3]; b14 = r[4];$$

$$\text{In}[6] := \varphi12 = 0.8348613543556869326470000\pi;$$

$$xx := \text{ArcCos}[\text{Cos}[\alpha1] \text{Cos}[\alpha2] + \text{Sin}[\alpha1] \text{Sin}[\alpha2] \text{Cos}[\varphi12]];$$

$$S12 := \sqrt{(a3 \text{Sin}[\varphi12] - \frac{a2 - a3 \text{Cos}[\varphi12]}{\text{Tan}[\varphi12]})^2 + (a2)^2 + (b12)^2 + \frac{1}{4}};$$

$$pa := \text{ArcCos}[\frac{\text{Cos}[\alpha2] - \text{Cos}[\alpha1] \text{Cos}[xx]}{\text{Sin}[\alpha1] \text{Sin}[xx]}];$$

$$\varphi34 := \text{ArcCos}[\frac{\text{Cos}[\alpha3] - \text{Cos}[\alpha4] \text{Cos}[xx]}{\text{Sin}[\alpha4] \text{Sin}[xx]}];$$

$$S34 := \sqrt{(a7 \text{Sin}[\varphi34] - \frac{a6 - a7 \text{Cos}[\varphi34]}{\text{Tan}[\varphi34]})^2 + (a6)^2 + (b34)^2 + \frac{1}{4}};$$

$$pb := \text{ArcCos}[\frac{\text{Cos}[\alpha3] - \text{Cos}[\alpha4] \text{Cos}[xx]}{\text{Sin}[\alpha4] \text{Sin}[xx]}]; \varphi14 := pa + pb;$$

$$pc := \text{ArcCos}[\frac{\text{Cos}[\alpha1] - \text{Cos}[\alpha2] \text{Cos}[xx]}{\text{Sin}[\alpha2] \text{Sin}[xx]}];$$

$$pd := \text{ArcCos}[\frac{\text{Cos}[\alpha4] - \text{Cos}[\alpha3] \text{Cos}[xx]}{\text{Sin}[\alpha3] \text{Sin}[xx]}]; \varphi23 := pc + pd;$$

$$yy := \text{ArcCos}[\text{Cos}[\alpha1] \text{Cos}[\alpha4] + \text{Sin}[\alpha1] \text{Sin}[\alpha4] \text{Cos}[\varphi14]];$$

$$S14 := \sqrt{(a1 \text{Sin}[\varphi14] - \frac{a8 - a1 \text{Cos}[\varphi14]}{\text{Tan}[\varphi14]})^2 + (a8)^2 + (b14)^2 + \frac{1}{4}};$$

$$S23 := \sqrt{(a5 \text{Sin}[\varphi23] - \frac{a4 - a5 \text{Cos}[\varphi23]}{\text{Tan}[\varphi23]})^2 + (a4)^2 + (b23)^2 + \frac{1}{4}};$$

$$N[\varphi12, 20]$$

$$N[S12, 20]$$

$$N[S23, 20]$$

$$N[S34, 20]$$

```
N[S14, 20]
```

```
Out[7] := 2.6227942976098511982
```

```
3.0376572056542638298
```

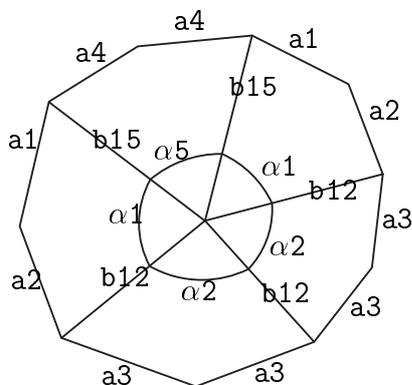
```
3.0376572056542638298
```

```
3.0376572056542638298
```

```
3.0376572056542638298
```

Durch sukzessives Ändern der Startvariable φ_{12} lassen sich die Radien S12, S23, S34 und S14 beliebig genau annähern.

Fünf Zellen kommen nicht in beliebiger Kombination vor. Deshalb ist die Berechnung dahin gehend vereinfacht, dass einige Keilwinkel und Flächen gleichgesetzt werden.



```
In[8] := (* z.B. Kantenkombination (443)(443)(443)(443)(445) *)
```

```
 $\alpha_1 = \text{kw}[[1]]$ ;  $\alpha_2 = \text{kw}[[1]]$ ;  $\alpha_5 = \text{kw}[[28]]$ ;
```

```
 $a_1 = \text{Rf}[19, 4]$ ;  $a_2 = \text{Rf}[19, 4]$ ;  $a_3 = \text{Rf}[19, 4]$ ;  $a_4 = \text{Rf}[20, 4]$ ;
```

```
 $b_{12} = \text{r}[4]$ ;  $b_{15} = \text{r}[4]$ ;
```

```
In[9] :=  $\varphi_{12} = 0.9120853669779660085230000\pi$ ;
```

$$xx := \text{ArcCos}[\text{Cos}[\alpha 1] \text{Cos}[\alpha 2] + \text{Sin}[\alpha 1] \text{Sin}[\alpha 2] \text{Cos}[\varphi 12]];$$

$$pa := \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[\alpha 2] - \text{Cos}[\alpha 1] \text{Cos}[xx]}{\text{Sin}[\alpha 1] \text{Sin}[xx]}\right];$$

$$pb := \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[\alpha 5] - (\text{Cos}[xx])^2}{(\text{Sin}[xx])^2}\right]; \quad \varphi 15 := 2pa + pb;$$

$$pc := \text{ArcCos}\left[\frac{\text{Cos}[xx] - \text{Cos}[xx] \text{Cos}[\alpha 5]}{\text{Sin}[xx] \text{Sin}[\varphi 15]}\right]; \quad pd := pa + pc;$$

$$S12 := \sqrt{(a3 \text{Sin}[\varphi 12] - \frac{a2 - a3 \text{Cos}[\varphi 12]}{\text{Tan}[\varphi 12]})^2 + (a2)^2 + (b12)^2 + \frac{1}{4}};$$

$$S23 := \sqrt{(a1 \text{Sin}[pd] - \frac{a4 - a1 \text{Cos}[pd]}{\text{Tan}[pd]})^2 + (a4)^2 + (b15)^2 + \frac{1}{4}};$$

$$S15 := \sqrt{(a3 \text{Sin}[\varphi 15] - \frac{a3 - a3 \text{Cos}[\varphi 15]}{\text{Tan}[\varphi 15]})^2 + (a3)^2 + (b12)^2 + \frac{1}{4}};$$

$$N[\varphi 12, 20]$$

$$N[S12, 20]$$

$$N[S23, 20]$$

$$N[S15, 20]$$

$$\text{Out}[10] := 2.8654006883447286076$$

$$2.2130600506867163200$$

$$2.2130600506867163200$$

$$2.2130600506867163200$$

Auch hier lassen sich die Radien S12, S23 und S15 durch sukzessives Ändern der Startvariable $\varphi 12$ beliebig genau annähern. Die Berechnungen in diesem Abschnitt wurden mit Mathematica 4.0 von Wolfram Research auf einem PC unter Windows 2000 durchgeführt.

B.3 Kombinationsprogramm

Dieses Programm berechnet aus den Daten der 75 uniformen Polyeder (d.h. Platonische und Archimedische Polyeder und p -Prismen und p -Antiprismen mit $3 \leq p \leq 14$) alle möglichen Kantenkombinationen. Die dabei zugrunde liegende Systematik ist in Kapitel 6 ab Seite 43 beschrieben. Das Programm ist geschrieben in Turbo Pascal 6.0.

```

program polytop3;
{Dieses Programm beinhaltet eine Liste von Zellen und deren
Dihedralwinkel an den Kanten. Es berechnet alle m"oglichen
Kombinationen dieser Zellen, sodass die Summe um eine Kante
herum kleiner als 2pi ist.}

{mit Prisma/Antiprisma}

uses Crt;

type feld=array[1..75]of integer;
      feld2=array[1..5]of integer;

const w:array[1..75]of real= {Winkel}
(0.333333333, 0.391826552, 0.391826552, 0.500000000,
0.500000000, 0.500000000, 0.500000000, 0.500000000,
0.500000000, 0.500000000, 0.500000000, 0.500000000,
0.520721247, 0.522332800, 0.524217966, 0.526453482,
0.529148024, 0.532460954, 0.536636212, 0.542068097,
0.549441271, 0.560068427, 0.576867558, 0.600000000,
0.608173448, 0.608173448, 0.608173448, 0.647583617,
0.647583617, 0.666666666, 0.695913276, 0.695913276,
0.695913276, 0.695913276, 0.708620016, 0.714285714,
0.750000000, 0.750000000, 0.750000000, 0.767720472,
0.767720472, 0.767720472, 0.777777778, 0.792347954,
0.792347954, 0.792347954, 0.794352389,
0.800000000, 0.804086724, 0.804086724, 0.806788285,
0.818181818, 0.823791808, 0.823791808, 0.833333333,
0.834568126, 0.846153846, 0.849610668, 0.851303265,
0.855346571, 0.857142857, 0.871479109, 0.883860236,
0.883860236, 0.884369481, 0.894906952, 0.903682483,
0.911104353, 0.912085367, 0.917463304);

n:array[1..75]of array[1..2]of integer= {Kantefl"achen}
((4,4), (3,3), (6,6), (3,4),
(4,4), (4,5), (4,6), (4,7),
(4,8), (4,9), (4,10), (4,11),
(4,12), (4,13), (4,14), (8,8),
(3,14), (3,13), (3,12), (3,11),
(3,10), (3,9), (3,8), (3,7),
(3,6), (3,5), (3,4), (4,4),
(3,3), (3,6), (6,6), (5,5),
(10,10), (4,4), (3,8), (4,6),
(3,4), (6,8), (3,3), (4,4),
(4,4), (4,8), (4,4), (3,3),
(3,3), (6,6), (4,4), (3,10),
(5,6), (3,5), (6,10), (3,4),
(4,4), (3,4), (4,6), (3,3),
(4,4), (4,5), (4,10), (4,4),
(3,3), (4,4), (3,5), (3,3),
(3,3), (4,4), (3,3), (4,6),
(3,4), (3,3), (3,3), (3,3),
(3,3), (3,3), (3,3));

name:array[1..75]of string= {Namen}
(' 4, 4, 3 ', ' 3, 3, 3 ', ' 6, 6, 3 ',
' 3, 4, 4 ', ' 4, 4, 4 ', ' 5, 4, 4 ',
' 6, 4, 4 ', ' 7, 4, 4 ', ' 8, 4, 4 ',
' 9, 4, 4 ', ' 10, 4, 4 ', ' 11, 4, 4 ',
' 12, 4, 4 ', ' 13, 4, 4 ', ' 14, 4, 4 ',
' 8, 8, 3 ', ' 3, 14, 3, 3 ', ' 3, 13, 3, 3 ',
' 3, 12, 3, 3 ', ' 3, 11, 3, 3 ', ' 3, 10, 3, 3 ',
' 3, 9, 3, 3 ', ' 3, 8, 3, 3 ', ' 3, 7, 3, 3 ',
' 3, 6, 3, 3 ', ' 3, 5, 3, 3 ', ' 3, 4, 3, 3 ',
' 4, 4, 5 ', ' 3, 3, 3, 3 ', ' 3, 6, 6 ',
' 6, 6, 4 ', ' 5, 5, 5 ', ' 10, 10, 3 ',
' 4, 4, 6 ', ' 3, 8, 8 ', ' 4, 6, 6 ',
' 3, 4, 3, 4 ', ' 6, 8, 4 ', ' 3, 3, 3, 4 ',
' 4, 4, 7 ', ' 4, 4, 3, 4 ', ' 4, 8, 6 ',
' 4, 4, 8 ', ' 3, 3, 3, 3, 3, 3 ', ' 3, 3, 3, 5 ',
' 6, 6, 5 ', ' 4, 4, 9 ', ' 3, 10, 10 ',
' 5, 6, 6 ', ' 3, 5, 3, 5 ', ' 6, 10, 4 ',
' 3, 4, 3, 3, 3, 3 ', ' 4, 4, 10 ', ' 3, 4, 4, 4 ',
' 4, 6, 8 ', ' 3, 3, 3, 6 ', ' 4, 4, 11 ',
' 4, 5, 4, 3 ', ' 4, 10, 6 ', ' 4, 4, 12 ',
' 3, 3, 3, 7 ', ' 4, 4, 13 ', ' 3, 5, 3, 3, 3, 3 ',
' 3, 3, 3, 3, 4 ', ' 3, 3, 3, 8 ', ' 4, 4, 14 ',
' 3, 3, 3, 9 ', ' 4, 6, 10 ', ' 3, 4, 5, 4 ',
' 3, 3, 3, 10 ', ' 3, 3, 3, 11 ', ' 3, 3, 3, 12 ',
' 3, 3, 3, 13 ', ' 3, 3, 3, 3, 5 ', ' 3, 3, 3, 14 ');

r:array[3..14]of real= {Fl"achenradien}
(0.288675135, 0.5, 0.68819096, 0.866025404,
1.038260698, 1.207106781, 1.37373871, 1.538841769,
1.702843619, 1.866025404, 2.028579743, 2.190643134);

Rf:array[1..75]of array[1..3]of real=
{Polyederfl"achenradien}
((0.5,0.288675135,0), (0.204124145,0,0),
(1.020620727,0.612372436,0), (0.5,0.288675135,0),
(0.5,0,0), (0.68819096,0.5,0),
(0.866025404,0.5,0), (1.038260698,0.5,0),
(1.207106781,0.5,0), (1.37373871,0.5,0),
(1.538841769,0.5,0), (1.702843619,0.5,0),
(1.866025404,0.5,0), (2.028579743,0.5,0),
(2.190643134,0.5,0),
(1.682521985,1.207106781,0),
(2.214111685,0.432095528,0),
(2.053869758,0.431947383,0),
(1.893445061,0.431760029,0),
(1.732787073,0.431518231,0),
(1.571824673,0.431198498,0),
(1.410454362,0.43076304,0),
(1.248519348,0.430147784,0),
(1.085769773,0.429236596,0),
(0.921780542,0.427799837,0),
(0.755761312,0.425325403,0),
(0.58604041,0.420448207,0), (0.68819096,0.5,0),
(0.408248291,0,0),
(1.020620727,0.612372436,0),
(1.414213563,1.224744871,0), (1.113516361,0,0),
(2.912781158,2.489898274,0), (0.866025404,0.5,0),
(1.682521985,1.207106781,0),
(1.414213563,1.224744871,0),
(0.816496581,0.707106781,0),
(2.207106781,2.090770275,1.914213562),
(0.58604041,0.420448207,0), (1.038260698,0.5,0),
(1.274273695,1.207106781,0),
(2.207106781,2.090770275,1.914213562),
(1.207106781,0.5,0), (0.755761312,0,0),
(0.755761312,0.425325403,0),
(2.327438428,2.267283933,0),
(1.37373871,0.5,0),
(2.912781158,2.489898274,0),
(2.327438428,2.267283933,0),
(1.511522623,1.376381915,0),
(3.736067965,3.668542468,3.440954787),
(1.213355801,1.142613508,0), (1.538841769,0.5,0),
(1.274273695,1.207106781,0),
(2.207106781,2.090770275,1.914213562),
(0.921780542,0.427799837,0), (1.702843619,0.5,0),

```

```

(2.157019846,2.118033982,2.06457287),
(3.736067965,3.668542468,3.440954787),
(1.866025404,0.5,0),
(1.085769773,0.429236596,0),
(2.028579743,0.5,0),
(2.077089663,1.980915945,0),
(1.213355801,1.142613508,0),
(1.248519348,0.430147784,0),
(2.190643134,0.5,0),
(1.410454362,0.43076304,0),
(3.736067965,3.668542468,3.440954787),
(2.157019846,2.118033982,2.06457287),
(1.571824673,0.431198498,0),
(1.732787073,0.431518231,0),
(1.893445061,0.431760029,0),
(2.053869758,0.431947383,0),
(2.077089663,1.980915945,0),
(2.214111685,0.432095528,0));

var i,j           :integer;
    k             :longint;
    kk,sss       :real;
    ianz         :feld2;
Ende             :boolean;
a,jja,auswahl,b,bb,srz :string;
dat             :text;
alpha1,alpha2,alpha3 :real;
gamma12,gamma13,gamma23 :real;
f12,f13,f23     :integer;
R_z,R_f,R_k,R_e  :real;
R113,R112,R212,R223,R323,R313:real;
rg1,rg2,rg3,rg4,rg5,rgt :integer;
rz1,rz2,rz3,rz4,rz5,rz6 :real;
fehlersin,fehlerad :string;

function arccos (x:real):real;
begin
  if (x>=1) and (x<=1) then
    arccos:=pi/2-arctan(x/sqrt(1-x*x));
  if x=-1 then arccos:=1;
  if x=1 then arccos:=0;
  if (x<-1) or (x>1) then arccos:=-999999;
end;

function Summklein(ianz:feld2):boolean;
var s:real;
    is:integer;
begin
  s:=0;
  for is:=1 to 5 do if ianz[is]>0 then s:=s+w[ianz[is]];
  if s<2.000001 then Summklein:=true
    else Summklein:=false;
end;

function Wert(sf:string):integer;
var w,t:integer;
begin
  if sf=' ' then Wert:=99;
  if sf<>' ' then begin
    val(sf,w,t);
    if t=0 then Wert:=w else Wert:=99;
  end;
end;

procedure Ausgabe(ianz:feld2);
var s:real;
    is:integer;
begin
  s:=0;
  gotoxy(1,26);
  if ianz[1]>0 then
    write('(',n[ianz[1],1]:2,',',n[ianz[1],2]:2,')');
  else write(' ');
  if ianz[2]>0 then
    write('(',n[ianz[2],1]:2,',',n[ianz[2],2]:2,')');
  else write(' ');
  write('(',n[ianz[3],1]:2,',',n[ianz[3],2]:2,')');
  write('(',n[ianz[4],1]:2,',',n[ianz[4],2]:2,')');
  write('(',n[ianz[5],1]:2,',',n[ianz[5],2]:2,')');
  gotoxy(1,28);
  writeln(' ');
  write(s:7:3);
  str(int(rz1*10000000+0.5)/10000000:7:5,b);
  if (fehlerad='') and (fehlersin='') then
  begin
    b:=copy(b,1,7);
    write(dat,b,' ');
    if ianz[1]>0 then write(dat,'(,name[ianz[1]],,');
      else write(dat,' ');
    if ianz[2]>0 then write(dat,'(,name[ianz[2]],,');
      else write(dat,' ');
    write(dat,'(,name[ianz[3]],,');
    write(dat,'(,name[ianz[4]],,');
    write(dat,'(,name[ianz[5]],,');
    writeln(dat,' ',jja,' ',fehlersin,fehlerad);
  end else k:=k-1;
  gotoxy(1,30);
  write(jja,' ',fehlersin,fehlerad);
  gotoxy(1,32);
  if ianz[1]>0 then write('(',name[ianz[1]],,');
    else write(' ');
  if ianz[2]>0 then write('(',name[ianz[2]],,');
    else write(' ');
  write('(',name[ianz[3]],,');
  write('(',name[ianz[4]],,');
  write('(',name[ianz[5]],,');
  writeln(' ');
end;

{***** H A U P T P R O G R A M M *****}

begin
  assign(dat,'c:\poly\knte1.txt');
  rewrite(dat);
  ianz[1]:=0;ianz[2]:=0;ianz[3]:=1;ianz[4]:=1;ianz[5]:=0;
  Ende:=false;
  k:=0;
  clrscr;
  repeat
    inc(ianz[5]);
    if ianz[5]>=76 then begin ianz[5]:=1;inc(ianz[4]);end;
    if ianz[4]>=76 then begin ianz[4]:=1;inc(ianz[3]);end;
    if ianz[3]>=76 then begin ianz[3]:=1;inc(ianz[2]);end;
    if ianz[2]>=76 then begin ianz[2]:=1;inc(ianz[1]);end;
    R_e:=0;
    fehlersin:='';
    fehlerad:='';
    gotoxy(1,40);if ianz[1]>0 then write(name[ianz[1]]);
    gotoxy(1,41);if ianz[2]>0 then write(name[ianz[2]]);
    gotoxy(1,42);write(name[ianz[3]],' =z3');
    gotoxy(1,43);write(name[ianz[4]],' =z2');
    gotoxy(1,44);write(name[ianz[5]],' =z1');
    if Summklein(ianz) and (ianz[1]<75) then
      begin
        jja:='0';
        if ianz[2]=0 then
          begin
            if (n[ianz[3],2]=n[ianz[4],1]) and
              (n[ianz[4],2]=n[ianz[5],1]) and
              (n[ianz[5],2]=n[ianz[3],1]) then jja:=' 212121';
            if (n[ianz[3],2]=n[ianz[4],2]) and
              (n[ianz[4],1]=n[ianz[5],1]) and
              (n[ianz[5],2]=n[ianz[3],1]) then jja:=' 221121';
            if (n[ianz[3],2]=n[ianz[4],1]) and
              (n[ianz[4],2]=n[ianz[5],2]) and
              (n[ianz[5],1]=n[ianz[3],1]) then jja:=' 212211';
            if (n[ianz[3],2]=n[ianz[4],2]) and
              (n[ianz[4],1]=n[ianz[5],2]) and
              (n[ianz[5],1]=n[ianz[3],1]) then jja:=' 221211';
            if (n[ianz[3],1]=n[ianz[4],1]) and
              (n[ianz[4],2]=n[ianz[5],1]) and
              (n[ianz[5],2]=n[ianz[3],2]) then jja:=' 112122';
            if (n[ianz[3],1]=n[ianz[4],2]) and
              (n[ianz[4],1]=n[ianz[5],1]) and
              (n[ianz[5],2]=n[ianz[3],2]) then jja:=' 121122';
            if (n[ianz[3],1]=n[ianz[4],1]) and
              (n[ianz[4],2]=n[ianz[5],2]) and

```

```

(n[ianz[5],1]=n[ianz[3],2]) then jja:=' 112212';
if (n[ianz[3],1]=n[ianz[4],2]) and
(n[ianz[4],1]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[3],2]) then jja:=' 121212';
if jja<>'0' then
begin
gotoxy(1,5);
write('1:',name[ianz[5]],' 2:',name[ianz[4]],
      ' 3:',name[ianz[3]]);
alpha1:=w[ianz[5]]*pi;
alpha2:=w[ianz[4]]*pi;
alpha3:=w[ianz[3]]*pi;
gotoxy(1,6);
write('alpha1:',alpha1:12:10,' alpha2:',alpha2:12:10,
      ' alpha3:',alpha3:12:10);
gamma12:=arccos(
  (cos(alpha3)-cos(alpha1)*cos(alpha2))/
  (sin(alpha1)*sin(alpha2)));
gamma13:=arccos(
  (cos(alpha2)-cos(alpha1)*cos(alpha3))/
  (sin(alpha1)*sin(alpha3)));
gamma23:=arccos(
  (cos(alpha1)-cos(alpha2)*cos(alpha3))/
  (sin(alpha2)*sin(alpha3)));
gotoxy(1,7);
writein('gamma12=',gamma12:12:10,' gamma23=',
        gamma23:12:10,' gamma13=',gamma13:12:10,' ');
if jja[8]='1' then
begin
f12:=n[ianz[5],1];
end else
begin
f12:=n[ianz[5],2];
end;
if jja[6]='1' then
begin
f23:=n[ianz[4],1];
end else
begin
f23:=n[ianz[4],2];
end;
if jja[10]='1' then
begin
f13:=n[ianz[3],1];
end else
begin
f13:=n[ianz[3],2];
end;
gotoxy(1,8);
write('f12= ',f12:2,' f23= ',f23:2,
      ' f13= ',f13:2);
gotoxy(1,9);
write(r[f12]:12:10,' r[f23]:12:10,' r[f13]:12:10);
R112:=0;R212:=0;R223:=0;R323:=0;R313:=0;R113:=0;
auswahl:=name[ianz[5]];
gotoxy(60,16);write('F-Bestimmung');
gotoxy(60,17);write(copy(auswahl,1,40));

rg1:=Wert(copy(auswahl,1,2));
rg2:=Wert(copy(auswahl,4,2));
rg3:=Wert(copy(auswahl,7,2));
rg4:=Wert(copy(auswahl,10,2));
rg5:=Wert(copy(auswahl,13,2));
repeat
if rg1=rg2 then
begin
rg2:=rg3;rg3:=rg4;rg4:=rg5;rg5:=rg5+20;
end;
if rg2=rg3 then
begin
rg3:=rg4;rg4:=rg5;rg5:=rg5+20;
end;
if rg3=rg4 then
begin
rg4:=rg5;rg5:=rg5+20;
end;
if rg4=rg5 then
begin
rg5:=rg5+20;
end;
if rg1>rg2 then
rgt:=rg2;rg2:=rg1;rg1:=rgt;
end;
end;

end;
if rg2>rg3 then
begin
rgt:=rg3;rg3:=rg2;rg2:=rgt;
end;
if rg3>rg4 then
begin
rgt:=rg4;rg4:=rg3;rg3:=rgt;
end;
if rg4>rg5 then
begin
rgt:=rg5;rg5:=rg4;rg4:=rgt;
end;
until ((rg1<rg2)and(rg2<rg3)and(rg3<rg4)and(rg4<rg5))
or(rg5>10000);
gotoxy(60,18);
write(rg1,' ',rg2,' ',rg3,' ',rg4,' ',rg5,' ');

if f12=rg1 then R112:=Rf[ianz[5],1];
if f12=rg2 then R112:=Rf[ianz[5],2];
if f12=rg3 then R112:=Rf[ianz[5],3];
if f13=rg1 then R113:=Rf[ianz[5],1];
if f13=rg2 then R113:=Rf[ianz[5],2];
if f13=rg3 then R113:=Rf[ianz[5],3];

auswahl:=name[ianz[4]];
gotoxy(60,19);write(copy(auswahl,1,40));

rg1:=Wert(copy(auswahl,1,2));
rg2:=Wert(copy(auswahl,4,2));
rg3:=Wert(copy(auswahl,7,2));
rg4:=Wert(copy(auswahl,10,2));
rg5:=Wert(copy(auswahl,13,2));
repeat
if rg1=rg2 then
begin
rg2:=rg3;rg3:=rg4;rg4:=rg5;rg5:=rg5+20;
end;
if rg2=rg3 then
begin
rg3:=rg4;rg4:=rg5;rg5:=rg5+20;
end;
if rg3=rg4 then
begin
rg4:=rg5;rg5:=rg5+20;
end;
if rg4=rg5 then
begin
rg5:=rg5+20;
end;
if rg1>rg2 then
rgt:=rg2;rg2:=rg1;rg1:=rgt;
end;
if rg2>rg3 then
begin
rgt:=rg3;rg3:=rg2;rg2:=rgt;
end;
if rg3>rg4 then
begin
rgt:=rg4;rg4:=rg3;rg3:=rgt;
end;
if rg4>rg5 then
begin
rgt:=rg5;rg5:=rg4;rg4:=rgt;
end;
until ((rg1<rg2)and(rg2<rg3)and(rg3<rg4)and(rg4<rg5))
or(rg5>10000);
gotoxy(60,20);
write(rg1,' ',rg2,' ',rg3,' ',rg4,' ',rg5,' ');

if f12=rg1 then R212:=Rf[ianz[4],1];
if f12=rg2 then R212:=Rf[ianz[4],2];
if f12=rg3 then R212:=Rf[ianz[4],3];
if f23=rg1 then R223:=Rf[ianz[4],1];
if f23=rg2 then R223:=Rf[ianz[4],2];
if f23=rg3 then R223:=Rf[ianz[4],3];

auswahl:=name[ianz[3]];
gotoxy(60,21);write(copy(auswahl,1,40));

rg1:=Wert(copy(auswahl,1,2));
rg2:=Wert(copy(auswahl,4,2));

```

```

rg3:=Wert(copy(auswahl,7,2));
rg4:=Wert(copy(auswahl,10,2));
rg5:=Wert(copy(auswahl,13,2));
repeat
if rg1=rg2 then
begin
rg2:=rg3;rg3:=rg4;rg4:=rg5;rg5:=rg5+20;
end;
if rg2=rg3 then
begin
rg3:=rg4;rg4:=rg5;rg5:=rg5+20;
end;
if rg3=rg4 then
begin
rg4:=rg5;rg5:=rg5+20;
end;
if rg4=rg5 then
begin
rg5:=rg5+20;
end;
if rg1>rg2 then
begin
rgt:=rg2;rg2:=rg1;rg1:=rgt;
end;
if rg2>rg3 then
begin
rgt:=rg3;rg3:=rg2;rg2:=rgt;
end;
if rg3>rg4 then
begin
rgt:=rg4;rg4:=rg3;rg3:=rgt;
end;
if rg4>rg5 then
begin
rgt:=rg5;rg5:=rg4;rg4:=rgt;
end;
until ((rg1<rg2)and(rg2<rg3)and(rg3<rg4)and(rg4<rg5))
or(rg5>10000);
gotoxy(60,22);
write(rg1,' ',rg2,' ',rg3,' ',rg4,' ',rg5,' ');

if f13=rg1 then R313:=Rf[ianz[3],1];
if f13=rg2 then R313:=Rf[ianz[3],2];
if f13=rg3 then R313:=Rf[ianz[3],3];
if f23=rg1 then R323:=Rf[ianz[3],1];
if f23=rg2 then R323:=Rf[ianz[3],2];
if f23=rg3 then R323:=Rf[ianz[3],3];

gotoxy(1,11);
write('R112=',R112:10:8,' R212=',R212:10:8,
' R223=',R223:10:8);
gotoxy(1,12);
write('R323=',R323:10:8,' R313=',R313:10:8,
' R113=',R113:10:8);

if sin(gamma13)<>0 then
begin
R_z:=R113*sin(gamma13)
-(R313-R113*cos(gamma13))*cos(gamma13)/
sin(gamma13);
rz5:=R_z;
rz6:=R313*sin(gamma13)
-(R113-R313*cos(gamma13))*cos(gamma13)/
sin(gamma13);
end else
begin
writeln('Sin(gamma13)=0. ');
fehlersin:='sin(gamma13)=0 ';
R_z:=99999999;
rz5:=R_z;rz6:=rz5;
end;
if sin(gamma12)<>0 then
begin
rz1:=R212*sin(gamma12)
-(R112-R212*cos(gamma12))*cos(gamma12)/
sin(gamma12);
rz2:=R112*sin(gamma12)
-(R212-R112*cos(gamma12))*cos(gamma12)/
sin(gamma12);
end else
begin
writeln('Sin(gamma12)=0. ');
fehlersin:=fehlersin+'sin(gamma12)=0 ';

```



```

(n[ianz[2],1]=n[ianz[3],2]) and
(n[ianz[3],1]=n[ianz[4],2]) and
(n[ianz[4],1]=n[ianz[5],1]) and
(n[ianz[5],2]=n[ianz[1],2]) then jja:='1212121122';
if (n[ianz[1],2]=n[ianz[2],1]) and
(n[ianz[2],2]=n[ianz[3],1]) and
(n[ianz[3],2]=n[ianz[4],1]) and
(n[ianz[4],2]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],1]) then jja:='2121212211';
if (n[ianz[1],2]=n[ianz[2],2]) and
(n[ianz[2],1]=n[ianz[3],1]) and
(n[ianz[3],2]=n[ianz[4],1]) and
(n[ianz[4],2]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],1]) then jja:='2211212211';
if (n[ianz[1],2]=n[ianz[2],1]) and
(n[ianz[2],2]=n[ianz[3],2]) and
(n[ianz[3],1]=n[ianz[4],1]) and
(n[ianz[4],2]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],1]) then jja:='2122112211';
if (n[ianz[1],2]=n[ianz[2],2]) and
(n[ianz[2],1]=n[ianz[3],2]) and
(n[ianz[3],1]=n[ianz[4],1]) and
(n[ianz[4],2]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],1]) then jja:='1121212212';
if (n[ianz[1],1]=n[ianz[2],2]) and
(n[ianz[2],1]=n[ianz[3],1]) and
(n[ianz[3],2]=n[ianz[4],1]) and
(n[ianz[4],2]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],2]) then jja:='1211212212';
if (n[ianz[1],1]=n[ianz[2],1]) and
(n[ianz[2],2]=n[ianz[3],2]) and
(n[ianz[3],1]=n[ianz[4],1]) and
(n[ianz[4],2]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],2]) then jja:='1122112212';
if (n[ianz[1],1]=n[ianz[2],2]) and
(n[ianz[2],2]=n[ianz[3],2]) and
(n[ianz[3],1]=n[ianz[4],1]) and
(n[ianz[4],2]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],1]) then jja:='2211221211';
if (n[ianz[1],2]=n[ianz[2],2]) and
(n[ianz[2],1]=n[ianz[3],2]) and
(n[ianz[3],1]=n[ianz[4],1]) and
(n[ianz[4],2]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],1]) then jja:='2122121211';
if (n[ianz[1],2]=n[ianz[2],2]) and
(n[ianz[2],1]=n[ianz[3],2]) and
(n[ianz[3],1]=n[ianz[4],2]) and
(n[ianz[4],1]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],1]) then jja:='2212121211';

if (n[ianz[1],1]=n[ianz[2],1]) and
(n[ianz[2],2]=n[ianz[3],1]) and
(n[ianz[3],2]=n[ianz[4],2]) and
(n[ianz[4],1]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],2]) then jja:='1121221212';
if (n[ianz[1],1]=n[ianz[2],2]) and
(n[ianz[2],1]=n[ianz[3],1]) and
(n[ianz[3],2]=n[ianz[4],2]) and
(n[ianz[4],1]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],2]) then jja:='1122121212';
if (n[ianz[1],1]=n[ianz[2],2]) and
(n[ianz[2],2]=n[ianz[3],2]) and
(n[ianz[3],1]=n[ianz[4],2]) and
(n[ianz[4],1]=n[ianz[5],2]) and
(n[ianz[5],1]=n[ianz[1],2]) then jja:='1212121212';
end;
if jja<>'0' then
begin
k:=k+1;
gotoxy(1,3);
Ausgabe(ianz);
gotoxy(1,4);writeln(jja);
end;
end;
gotoxy(1,1);
writeln(ianz[1]:2,ianz[2]:3,ianz[3]:3,ianz[4]:3,ianz[5]:3);
sss:=0;
for j:=1 to 5 do if ianz[j]>0 then sss:=sss+ianz[j];
writeln(k:6,' ',sss:11:9,' ');
if ianz[5]=0 then
begin
gotoxy(70,1);write('ianz[5]=0');readln;
end;
if not(Summeklein(ianz)) then
begin
ianz[5]:=0;inc(ianz[4]);
if not(Summeklein(ianz))then
begin
ianz[4]:=1;inc(ianz[3]);
if not(Summeklein(ianz)) then
begin
ianz[3]:=1;inc(ianz[2]);
if not(Summeklein(ianz)) then
begin
ianz[2]:=1;inc(ianz[1]);
end;
end;
end;
end;
end;
if jja<>'0' then
begin
clrscr;
end;
rzi:=0;
until (ianz[1]=76) or Ende;
write(dat,'Ende. ');
close(dat);
end.

```

Anhang C

Ergänzungen zum Beweis

C.1 Fehlerabschätzung

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Analyse der in dieser Arbeit gemachten Berechnungen. Dabei soll das Interesse auf den durch die Berechnungen und der Benutzung von (gerundeten) Zwischenergebnissen gemachten Fehlern liegen. Zur Berechnung wurden verschiedene Hilfsmittel (mit verschiedenen Genauigkeiten) benutzt. Hier soll nun nicht jedes einzelne Hilfsmittel in allen Details analysiert werden, sondern für die einzelnen Schritte obere Schranken für den möglichen Fehler durch Rundungen und/oder Auslöschungen¹⁰ gemacht werden.

Im Folgenden werden wir nun jedes Kapitel und die darin angestellten Berechnungen anschauen und die Fehler der Ein- und Ausgaben angeben. Am Ende wollen wir die Rechenfehler in den beiden Tabellen ab Seite 127 bzw. ab Seite 139 abschätzen und daraus die Einteilung in die Gruppen rechtfertigen.

C.1.1 Berechnungen in Kapitel 3

In Kapitel 3 wurden die Keilwinkel der uniformen Polyeder berechnet. Dabei wurden in 3.1, 3.2 und 3.3 die Formeln analytisch (d.h. durch Umformen – insbesondere in 3.3) hergeleitet und die Keilwinkel mit Mathematica 4.0 auf 20 Nachkommastellen berechnet. Aus Platzgründen wurden die Keilwinkel

¹⁰So führt z.B. das Subtrahieren (fast) gleich großer Zahlen – da diese gerundet im Rechner zwischengespeichert wurden und meist nicht gleich sind – zu relativ großen Fehlern, insbesondere wenn der Rest anschließend mit großen Zahlen multipliziert wird. Das wirkliche Ergebnis weicht dann meist stark vom theoretischen Ergebnis null ab.

auf 17 Stellen hinter dem Komma gerundet. Der dabei gemachte Fehler ist sicher kleiner als 10^{-16} .

C.1.2 Berechnungen in Kapitel 4

In Kapitel 4 wurden die Radien der uniformen Polyeder berechnet. Dabei haben wir die nötigen Formeln analytisch hergeleitet und dann die Formeln für die Keilwinkel aus Kapitel 3 eingesetzt. Dabei wurde wieder mit Mathematica 4.0 auf 20 Nachkommastellen gerechnet und das Ergebnis auf 17 Stellen nach dem Komma gerundet dargestellt. Auch hier können wir also einen Fehler mit der oberen Schranke von 10^{-16} abschätzen.

C.1.3 Berechnungen in Kapitel 5

In Kapitel 5 haben wir aus den vorherigen Daten die Faltwinkel und Radien der Polychora berechnet. Hierbei wurden im Wesentlichen die gleichen Berechnungen wie in Kapitel 4 durchgeführt und Formeln aus Kapitel 3 mit denen aus Kapitel 4 kombiniert. Diese Berechnungen wurden mit Mathematica 4.0 wieder mit 20 Nachkommastellen Genauigkeit durchgeführt und auf 17 Stellen gerundet dargestellt. Auch hier können wir deshalb rechnerinterne Fehler in der Größenordnung von mehr als 10^{-16} ausschließen.

C.1.4 Berechnungen in Kapitel 6

In diesem Kapitel haben wir ein Programm in Turbo Pascal 6.0 benutzt, welches alle kombinatorischen Möglichkeiten von Zellen um eine Kante systematisch durchtestet. Da hier nur mit ganzen Zahlen (3-, 4-, 5-Ecke usw., deren Kombinationen an Ecken zu Zellen und schließlich Zellkombinationen um Kanten) gerechnet (oder besser gearbeitet) wird, können wir einen Fehler ausschließen. Lediglich die Berechnung der Keilwinkelsummen, die in Turbo Pascal mit der Genauigkeit von maximal acht Nachkommastellen geschieht, kann hier Fehler erzeugen. Da aber lediglich die auf acht Stellen gerundeten Keilwinkel addiert werden, deren Fehler wir mit kleiner als 10^{-7} abschätzen, erhalten wir als sehr grobe Obergrenze einen Fehler von maximal 10^{-6} .

Um nun durch das Kombinationsprogramm keine möglichen Kantenkombinationen auszuschließen, deren genaue Keilwinkelsumme kleiner als 2π , deren gerundete Winkelsumme (genaue Summe plus maximalen Fehler von 10^{-6}) aber etwas größer als 2π ist, erlauben wir im Programm (siehe in der Funktion `Summklein` die obere Schranke für die Variable `s`) Keilwinkelsummen von $(2 + 10^{-6})\pi$ (und erhöhen die Fehlerschranke weiter auf etwa

$3, 14159 \cdot 10^{-6}$). Damit enthält Tabelle 1 alle möglichen Kantenkombinationen, deren Winkelsumme kleiner als $(2 + 10^{-6})\pi$ ist; allerdings wurden diejenigen Kombinationen schon wieder entfernt, deren Summen (genau) 2π betragen. (Entfernt wurden offensichtliche „Raumausfüller“ wie $(4,4,4)$ $(4,4,8)$ $(4,4,8)$, $(4,4,6)$ $(4,4,6)$ $(4,4,6)$ oder $(3,3,3)$ $(3,3,3,3)$ $(3,3,3)$ $(3,3,3,3)$ und ähnliche.)

Anschließend wurden die Radien der Umsphäre mit Mathematica 4.0 (mit dem Radien-Programm ab Seite 156) aus den exakten Formeln mit 20 Stellen berechnet und dann in Tabelle 1 (ab Seite 127) mit 13 Nachkommastellen eingetragen. Dabei liegt der Fehler innerhalb der Rundung, d.h. unter 10^{-13} .

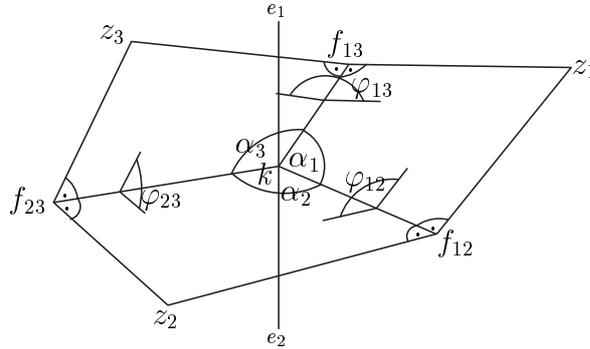
C.1.5 Analyse der Tabellen und Gruppeneinteilung

Betrachten wir die Tabelle 2 (ab Seite 139), genauer die Differenzen der Radien einer Kantenkombination zur nächsten, dann fällt auf, dass diese Unterschiede entweder bei 13 Nachkommastellen gleich null (d.h. kleiner als 10^{-13}) oder aber über einer unteren Schranke von $9.9254372 \cdot 10^{-6}$ (beim Radius $1.8477590650226 / 1.8477689904598$) liegen. Das heißt, dass der Radienunterschied (aufgrund eventueller Rechenfehler) innerhalb einer Gruppe immer noch mindestens sieben Größenordnungen unterhalb der Radienunterschiede verschiedener Gruppen anzusiedeln ist. Und in den allermeisten Fällen ist dieser Sprung von einer zur nächsten Gruppe eher in der Nähe von 10^{-2} als an der unteren Schranke.

Die von uns durchgeführte Einteilung in Gruppen ist also gerechtfertigt, selbst wenn wir eventuelle Rechenfehler von maximal 10^{-13} mit berücksichtigen. Damit haben wir gezeigt, dass wir mit dieser Einteilung keine theoretisch mögliche Kombination von Kantenumgebungen um eine Ecke außer Acht gelassen haben.

C.2 Faltwinkel = Keilwinkel im Schnitt

In Kapitel 5 wurde behauptet, dass die Faltwinkel in einer Kantenkombination genau den Keilwinkeln zwischen den Schnittflächen entsprechen, wenn wir eine Hyperebene senkrecht durch den Kantenmittelpunkt legen und damit die Zellen schneiden. Hier soll diese Behauptung bewiesen werden.



Gehen wir von einer Kantenkombination mit drei Zellen aus (mit vier und fünf Zellen läuft es analog). Dabei berühren sich die drei Zellen (mit den Mittelpunkten z_i) an einer gemeinsamen Kante $\overline{e_1 e_2}$, dessen Mittelpunkt k ist. Des Weiteren sind die Flächenmittelpunkte der Berührflächen zwischen den Zellen mit f_{ij} bezeichnet. Und schließlich sind die Keilwinkel α_i der Zellen z_i an k beschriftet. Die Faltwinkel φ_{ij} sind die Winkel an f_{ij} zwischen den beiden Geraden zu $\overline{f_{ij} z_i}$ und $\overline{f_{ij} z_j}$.

Betrachten wir jetzt jede Zelle z_i als 3-dimensionalen Polyeder. Dann ist klar, dass es eine Ebene durch k, f_{ij} und f_{jl} gibt und dass z_i ebenfalls auf dieser Ebene liegt. Diese Tatsache trifft nun auf alle drei Zellen dieser Kantenumgebung zu. Das heißt dann aber auch, dass auf der 3-dimensionalen Hyperebene, die durch die vier Punkte k, f_{12}, f_{13} und f_{23} gebildet wird, die drei Zellmittelpunkte z_1, z_2 und z_3 liegen, und dass diese Hyperebene senkrecht zur Kante $\overline{e_1 e_2}$ liegt.

Betrachten wir nun diese Hyperebene genauer: Die Faltwinkel φ_{ij} zwischen den Geraden $\overline{f_{ij} z_i}$ und $\overline{f_{ij} z_j}$ befinden sich vollständig in dieser Hyperebene, ebenso die drei Schnittflächen von den Zellen. Das heißt aber, dass wir – im 3-Dimensionalen – drei Flächen mit Flächenwinkeln α_1 bis α_3 um eine Ecke k geordnet haben, und dass auf den gemeinsamen Kanten jeweils einer der f_{ij} 's liegt. Dieselben Faltwinkel φ_{ij} lassen sich also eindeutig als Keilwinkel in diesem Schnitt interpretieren.

C.3 Eindeutigkeit der Faltwinkel bei 4 oder 5 Zellen pro Kante

Anders als bei Kantenkombinationen dreier Zellen, deren Existenz und Eindeutigkeit schon aus den Formeln folgt, lassen sich vier oder fünf Zellen nicht einfach und eindeutig so zu einer Kantenkombination zusammen setzen, dass diese Teil eines Polychors ist. Hier soll nun gezeigt werden, dass es zu vier oder fünf gegebenen Zellen mit einer Keilwinkelsumme kleiner als 2π eine

eindeutige Sphäre – mit berechenbarem Radius – gibt, so dass alle Ecken der Zellen auf dieser liegen.

Betrachten wir als erstes eine Abwicklung der Kantenkombination: Die vier (oder fünf) Zellen sind im 3-Dimensionalen um eine Kante geklebt, wobei zwischen der ersten und letzten Zelle eine Lücke bleibt. Nun definieren wir ein Ende der gemeinsamen Kante als oben oder innen, das andere als unten oder außen.

Jetzt schneiden wir – wie bei der Kombination von drei Zellen – das ganze Gebilde mit einer Ebene senkrecht zur Kante und durch den Kantenmittelpunkt k . Wir erhalten eine Ebene mit einem Punkt k , vier (bzw. fünf) Flächen mit Flächenwinkel α_1 bis α_4 (bzw. α_5), den gemeinsamen Kanten dazwischen (jeweils mit einem f_{ij} darauf) und einer Lücke. Falten wir jetzt alle Kanten um einen kleinen Winkel ε nach oben (also in die gleiche Richtung!). Wir erhalten für drei (bzw. vier) Kanten nach den Überlegungen aus Kapitel 5 (mit der Zeichnung auf Seite 37) ein unregelmäßiges 4-Eck mit $\varphi_{ij} = \varepsilon$, z_i , z_j und Polychormittelpunkt o . Daraus können wir für diese drei (bzw. vier) Kanten Radien einer Umsphäre ausrechnen, auf der zumindest alle Ecken der beiden Zellen sind, die mit den beiden Schnittflächen an dieser Kante korrespondieren.

Damit nun die Radien alle gleich werden, wählen wir uns für die erste Kante zwischen den Schnittflächen der ersten und zweiten Zelle ein beliebiges, kleines ε_1 und bestimmen nun erst ε_2 zwischen der zweiten und dritten Schnittfläche und dann ε_3 zwischen der dritten und vierten Schnittfläche (und für fünf Zellen analog ε_4), so dass jeweils der nächste Radius genauso groß ist wie der erste Radius, der aus ε_1 folgte. Dabei betrachten wir nun den Abstand a der Flächenmittelpunkte der ersten und der letzten Zelle an der Lücke, die sich ja auch auf den Schnittflächen (genauer sogar auf deren Kanten) befinden. Bei der gesuchten Kantenkombination müssten diese beiden Flächenmittelpunkte – da die Flächen aufeinander fallen – identisch sein, der Abstand a also null betragen. Bei einer kleinen Vergrößerung von ε_1 – und damit der anderen ε 's – wird dieser Abstand a , sozusagen als Maß für die Lücke, immer kleiner. Und es ist aus Stetigkeitsgründen klar, dass es ein $\varepsilon_1^* = \varphi_{12}$ mit einem Radius R_e geben muss, so dass alle anderen ε 's zum gleichen Radius R_e führen und dass der Abstand a null wird.

C.4 Kanten- und Eckenumgebungen mit p - (Anti-)Prismen und $p > 14$

Bei der Erklärung der Beweisidee in Kapitel 2 wurden alle Prismen und Antiprismen mit p -Eck und $p > 14$ ausgeschlossen, mit der Begründung, dass es für größere p keine oder nur noch wenige Kombinationen mit den anderen uniformen Polyedern geben kann und dass diese wenigen Kombinationen dann nur nach gewissen „Rezepten“ (ein p -Prisma, zwei Hexaeder, ein p -Antiprisma o.ä.) vonstatten gehen. Diese Behauptung soll an dieser Stelle bewiesen werden.

Dazu werden wir für ein beliebiges p für ein p -Antiprisma und anschließend für ein p -Prisma alle kombinatorisch möglichen Kantenumgebungen aufzählen und dann für die Umgebungen die maximalen p errechnen, für die die Winkelsumme unter 2π bleibt. Da wir diese Berechnungen mit Mathematica 4.0 durchführen werden und somit beliebig genau rechnen können, werden wir hier auf die Einführung eines maximalen Fehlers F – wie im in Pascal geschriebenen Kombinationsprogramm – verzichten.

C.4.1 Die kombinatorisch möglichen Kantenumgebungen mit $p > 14$

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	$\Sigma_{\text{Keilwinkel}} < 2\pi$, $p \geq 3$ und
<u>1</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 3, 3)$	$\forall p$
<u>2</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 3)$	$\forall p$
<u>3</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 4)$	$p < 12$
<u>4</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 3, 3)$	$p < 7$
<u>5</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 5)$	$p < 7$
<u>6</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 6)$	$p < 6$
<u>7</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 7)$	$p < 6$
<u>8</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 3, 4)$	$p < 5$
<u>9</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 3, 5)$	$p < 4$
<u>10</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, q)$	$q > 7 \Rightarrow p < 5$
<u>11</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 4, 4)$	$(3, 4, 4)$	$\forall p$
<u>12</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 4, 4)$	$(3, 4, 3, 3)$	$p < 16$
<u>13</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 4, 4)$	$(3, 4, 3, 4)$	$p < 6$
<u>14</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 4, 4)$	$(3, 4, 3, 3, 3)$	$p < 4$
<u>15</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 4, 4)$	$(3, 4, 4, 4)$	$p < 4$
<u>16</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 4, 4)$	$(3, 4, 5, 4)$	$p < 4$
<u>17</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, q, 3, 3)$	$(3, q, 3, 3)$	$q = 3 \Rightarrow p < 6$ $q = 4 \Rightarrow p < 8$ \vdots \vdots
<u>18</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 10, 3, 3)$	$(3, 10, 10)$	$q \Rightarrow p < 2q$ $q < 4$
<u>19</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 8, 3, 3)$	$(3, 8, 8)$	$q < 5$
<u>20</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 6, 3, 3)$	$(3, 6, 6)$	$q < 8$
<u>21</u>		$(3, 3, 3, p)$	$(3, 5, 3, 3)$	$(3, 5, 3, 5)$	$q < 4$

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 3

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	$\Sigma_{\text{Keilwinkel}} < 2\pi$, $p \geq 3$ und
22		(3, 3, 3, p)	(3, 5, 3, 3)	(3, 5, 3, 3, 3)	$\bar{\exists} p$
23		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 4)	$q < 5$
24		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	$q < 4$
25		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	$q < 4$
26		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	$\bar{\exists} p$
27		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, q)	(3, 3, 3)	$q = 3 \Rightarrow \forall p$ $q \geq 4 \Rightarrow p < 12$
28		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, q)	(3, 3, 3, 3)	$q = 3 \Rightarrow p < 6$ $q = 4 \Rightarrow p < 4$ $q = 5 \Rightarrow p < 4$ $q = 6 \Rightarrow \bar{\exists} p$ $q > 6 \Rightarrow \bar{\exists} p$
29		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	$p < 4$
30		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	$\bar{\exists} p$
31		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	$\bar{\exists} p$
32		(3, 3, 3, p)	(3, 6, 6)	(3, 6, 6)	$p < 6$
33		(3, 3, 3, p)	(3, 8, 8)	(3, 8, 8)	$\bar{\exists} p$
34		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 4)	$\bar{\exists} p$
35		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	$\bar{\exists} p$
36		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 4, 4)	$\bar{\exists} p$
37		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 4)	(3, 4, 5, 4)	$\bar{\exists} p$
38		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, q)	(3, 3, 3, r)	$q = r = 3 \Rightarrow p < 6$ $q = 3, r = 4 \Rightarrow p < 4$ $q = 3, r = 5 \Rightarrow p < 4$ $q \geq 4, r \geq 4 \Rightarrow \bar{\exists} p$
39		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, q)	(3, 3, 3, 3, 3)	$q \geq 4 \Rightarrow \bar{\exists} p$
40		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, q)	(3, 3, 3, 3, 4)	$q \geq 4 \Rightarrow \bar{\exists} p$
41		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, q)	(3, 3, 3, 3, 5)	$q \geq 4 \Rightarrow \bar{\exists} p$
42		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	$\bar{\exists} p$
43		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	$\bar{\exists} p$
44		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	$\bar{\exists} p$
45		(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3, 3, 3)	(3, 3, 3, q)	$q = 3 \Rightarrow p < 4$ $q \geq 4 \Rightarrow \bar{\exists} p$
46		(3, 3, 3, p)	(3, 10, 10)	(3, 10, 10)	$\bar{\exists} p$
47		(3, 3, 3, p)	(3, 5, 3, 5)	(3, 5, 3, 5)	$\bar{\exists} p$
48		(3, 3, 3, p)	(3, 5, 3, 5)	(3, 5, 3, 3, 3)	$\bar{\exists} p$
49		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 3, 3)	(3, 4, 3, 3, 3)	$\bar{\exists} p$
50		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 3, 3)	(3, 4, 4, 4)	$\bar{\exists} p$
51		(3, 3, 3, p)	(3, 4, 3, 3, 3)	(3, 4, 5, 4)	$\bar{\exists} p$
52		(3, 3, 3, p)	(3, 5, 3, 3, 3)	(3, 5, 3, 3, 3)	$\bar{\exists} p$
53		(3, p, 3, 3)	(3, p, 3, 3)	(3, 3, 3)	$\forall p$
54		(3, p, 3, 3)	(3, p, 3, 3)	(3, 3, 3, q)	$\forall p, q$
55		(3, p, 3, 3)	(3, p, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 3)	$\forall p$
56		(3, p, 3, 3)	(3, p, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 4)	$\forall p$
57		(3, p, 3, 3)	(3, p, 3, 3)	(3, 3, 3, 3, 5)	$\forall p$
58		(3, p, 3, 3)	(p, 4, 4)	(3, 4, 4)	$\forall p$
59		(3, p, 3, 3)	(p, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	$\forall p$
60		(3, p, 3, 3)	(p, 4, 4)	(3, 4, 4, 4)	$\forall p$
61		(3, p, 3, 3)	(p, 4, 4)	(3, 4, 5, 4)	$\forall p$
62		(3, p, 3, 3)	(p, 4, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	$\forall p$
63		(3, p, 3, 3)	(p, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	$\forall p$
64		(4, 4, p)	(q, 4, 4)	(q, 4, 4)	$\forall p, q$
65		(4, 4, p)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	$p < 27$
66		(4, 4, p)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	$p < 11$
67		(4, 4, p)	(3, 4, 4)	(3, 4, 3, 3, 3)	$p < 7$
68		(4, 4, p)	(3, 4, 4)	(3, 4, 4, 4)	$p < 7$
69		(4, 4, p)	(3, 4, 4)	(3, 4, 5, 4)	$p < 6$
70		(4, 4, p)	(4, 4, 4)	(4, 4, 3, 4)	$p < 8$
71		(4, 4, p)	(5, 4, 4)	(4, 5, 4, 3)	$p < 7$

Fortführung auf folgender Seite

Fortführung von Tabelle 3

Nr.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	Konfig.	$\Sigma_{\text{Keilwinkel}} < 2\pi$, $p \geq 3$ und
<u>72</u>		(4, 4, p)	(6, 4, 4)	(4, 6, 6)	$p < 11$
<u>73</u>		(4, 4, p)	(6, 4, 4)	(4, 6, 8)	$p < 7$
<u>74</u>		(4, 4, p)	(6, 4, 4)	(4, 6, 10)	$p < 6$
<u>75</u>		(4, 4, p)	(8, 4, 4)	(4, 8, 6)	$p < 8$
<u>76</u>		(4, 4, p)	(10, 4, 4)	(4, 10, 6)	$p < 7$
<u>77</u>		(4, 4, p)	(4, 4, q)	(4, 4, r)	$r = 3, q \leq 6 \Rightarrow \forall p$ $r = 3, q = 7 \Rightarrow p < 42$ $r = 3, q = 8 \Rightarrow p < 24$ $r = 3, q = 9 \Rightarrow p < 18$ $r = 3, q = 10 \Rightarrow p < 15$ $r = 4, q = 4 \Rightarrow \forall p$ $r = 4, q = 5 \Rightarrow p < 20$ $r = 4, q = 6 \Rightarrow p < 12$ $r = 5, q = 5 \Rightarrow p < 10$
<u>78</u>		(4, 4, p)	(4, 4, q)	(4, 4, 3, 4)	$p = 3 \Rightarrow p < 24$ $p = 4 \Rightarrow p < 8$ $p = 5 \Rightarrow p < 5$
<u>79</u>		(4, 4, p)	(4, 4, 3, 4)	(4, 4, 3, 4)	$p < 4$
<u>80</u>		(p, 4, 4)	(p, 4, 4)	(4, 4, 3, 4)	$\forall p$
<u>81</u>	(3, p, 3, 3)	(3, p, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	$\forall p$
<u>82</u>	(3, p, 3, 3)	(p, 4, 4)	(4, 4, 3)	(3, 4, 4)	$\forall p$
<u>83</u>	(3, p, 3, 3)	(p, 4, 4)	(3, 4, 4)	(3, 3, 3)	$\forall p$
<u>84</u>	(3, p, 3, 3)	(p, 4, 4)	(3, 4, 3, 3)	(3, 3, 3)	$\forall p$
<u>85</u>	(3, 3, 3, p)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	(3, 3, 3)	$p < 7$
<u>86</u>	(4, 4, p)	(4, 4, q)	(4, 4, r)	(4, 4, s)	$\{q, r, s\} = \{3, 3, 3\}^{11} \Rightarrow \forall p$ $\{q, r, s\} = \{3, 3, 4\} \Rightarrow p < 12$ $\{q, r, s\} = \{3, 3, 5\} \Rightarrow p < 8$ $\{q, r, s\} = \{3, 4, 4\} \Rightarrow p < 6$ $\{q, r, s\} = \{3, 4, 5\} \Rightarrow p < 5$
<u>87</u>	(p, 4, 4)	(p, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 3)	$\forall p$
<u>88</u>	(p, 4, 4)	(p, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 4)	$\forall p$
<u>89</u>	(p, 4, 4)	(p, 4, 4)	(4, 4, 3)	(4, 4, 5)	$\forall p$

Etliche dieser Kantenumgebungen sind für alle möglichen p , andere für keine und wieder andere nur für wenige p nach der Keilwinkelsumme erlaubt. Ziel ist es jetzt, die Kantenumgebungen mit möglichen p entweder auszuschließen oder eindeutig mit einem uniformen Polychor zu identifizieren. Dazu werden wir, ähnlich der Einzelbetrachtungen des Rests in Kapitel 7, jede hier gefundene Kantenumgebung einzeln und in Kombination mit den anderen betrachten. Da wir hier die Radien – für unendlich viele Kantenumgebungen – nicht explizit ausrechnen und vergleichen können, werden wir zuerst versuchen, den Ausschluss durch eventuelle unmögliche Kantenumgebungen, die aus der gefragten folgen, herbeizuführen. Sollten Kantenumgebungen folgen, die aber nur für bestimmte, kleine p existieren und diese p kleiner als 14 sein, so haben wir diese Kombinationen in Kapitel 7 schon behandelt (oder sogar vorher mit den Lemmata ausgeschlossen); in diesem Fall können wir die erste Kantenumgebung, mit der wir angefangen haben, für große p ausschließen.

¹¹Da die Variablen p , q , r und s zyklisch vertauscht werden können, bedeutet die Notation mit den geschweiften Klammern, dass die drei Variablen die drei Werte annehmen müssen, wobei die Reihenfolge beliebig ist.

C.4.2 Die Kantenumgebung $\boxed{1}$

Fangen wir mit der Kantenumgebung $(3,3,3,p)(3,3,3)(3,3,3)$ an und setzen $(3,3,3,p)$ in die Mitte. An eine der beiden freien Kanten zwischen $(3,3,3,p)$ und einem $(3,3,3)$ passt entweder mit $\boxed{21}$ ein $(3,3,3,3)$ oder wieder mit $\boxed{1}$ ein $(3,3,3)$. Im ersten Fall existiert dann zwischen $(3,p,3,3)$ und $(3,3,3,3)$ nur noch $\boxed{54}$ mit $q = 3$ und einem weiteren $(3,p,3,3)$. Dann bekommen wir aber eine Kante zwischen den letzten Zellen mit $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3,3)(3,3,3,p)$. Diese Kante liefert für $p = 3$ schon eine Keilwinkelsumme von genau 2π . Somit kann am inneren $(3,3,3,p)$ kein $(3,3,3,3)$ liegen. An seine Stelle kleben wir also ein $(3,3,3)$ an. An einer freien Kante zwischen $(3,p,3,3)$ und $(3,3,3)$ passen jetzt $\boxed{53}$ mit $(3,p,3,3)(3,3,3)(3,p,3,3)$ (Fall $\langle i \rangle$), $\boxed{81}$ mit $(3,p,3,3)(3,3,3)(3,3,3)$ $(3,p,3,3)$ (Fall $\langle ii \rangle$), $\boxed{83}$ mit $(3,p,3,3)(3,3,3)(3,4,4)(p,4,4)$ (Fall $\langle iii \rangle$) oder $\boxed{83}$ mit $(3,p,3,3)(3,3,3)(3,4,3,3)(p,4,4)$ (Fall $\langle iv \rangle$). Mit Fall $\langle i \rangle$ an zwei benachbarten Kanten des inneren $(3,3,3,3,p)$ erhalten wir damit entlang der Kante, die nicht vollständig am inneren $(3,3,3,p)$ liegt, eine Kantenumgebung $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3,p) - \boxed{85}$ – mit $p \leq 6$, welche in Kapitel 7 schon betrachtet wurde. Mit Fall $\langle i \rangle$ an einer Kante und Fall $\langle ii \rangle$ an einer dazu benachbarten Kante bekommen wir $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3,p)$, welche nicht existiert. Gleiches gilt, wenn hier anstatt Fall $\langle ii \rangle$ der Fall $\langle iii \rangle$ oder $\langle iv \rangle$ zusammen mit $\langle i \rangle$ benutzt wird: Wir benötigen dann $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,4,4)(4,4,p)$ bzw. $(3,3,3)(3,3,3)(3,4,3,3)(4,4,p)$, die sich nicht einmal schließen. Also ist Fall $\langle i \rangle$ ausgeschlossen. Legen wir an zwei benachbarte Kanten des p -Ecks zweimal $\langle ii \rangle$, dann benötigen wir an der Kante, die die innere Zelle nur an einer Ecke berührt, die Kantenumgebung $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3) - \text{Nr. 999}$ in den Tabellen im Anhang A. Somit haben wir eine Ecke umschlossen und haben als Eckenumgebung zwei $(3,p,3,3)$ und drei $(3,3,3)$. Übertragen wir dies jetzt auf alle Ecken des inneren $(3,3,3,p)$, dann sehen wir, dass alle Ecken der $(3,3,3)$, die nicht an der inneren Zelle liegen, zusammen fallen müssen. Diese Ecke berühren dann aber auf jeden Fall mehr als drei $(3,3,3)$ wodurch die Eckentransitivität gebrochen ist. Zweimal $\langle ii \rangle$ ist also nicht möglich. Und ersetzen wir eines der beiden $\langle ii \rangle$ durch $\langle iii \rangle$ oder $\langle iv \rangle$, dann bekommen wir wieder nicht schließende Kantenumgebungen $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,4,4)(3,3,3)$ bzw. $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,4,3,3)(3,3,3)$. Folglich ist der Fall $\langle ii \rangle$ auch nicht möglich. Setzen wir nun zweimal den Fall $\langle iii \rangle$ an benachbarte Kanten des inneren $(3,3,3,p)$ entlang eines p -Ecks, dann benötigen wir die Kantenumgebung $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,4,4)(3,4,4)$, welche nicht existiert. Kombinieren wir also $\langle iii \rangle$ mit $\langle iv \rangle$, so finden wir kombinatorisch $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,4,4)(3,4,3,3)$, welche ebenfalls nicht existiert. Dann ist auch der Fall $\langle III \rangle$ nicht möglich. Und Fall $\langle iv \rangle$ an zwei Kanten führt zu der nichtexistenten Kantenumgebung

$(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,4,3,3)(3,4,3,3)$. Somit sind alle vier Fälle ausgeschlossen, damit auch der zweite Fall vom Anfang und so die Kantenumgebung $\boxed{1}$.

C.4.3 Die Kantenumgebung $\boxed{2}$

Fangen wir hier mit der Kantenumgebung $(3,3,3,p)(3,3,3)(3,3,3,3)$ an, dann können wir an einer Kante zwischen $(3,3,3,p)$ und $(3,3,3)$ mit $\boxed{1}$ einen weiteren $(3,3,3)$ anlegen. Diesen Fall haben wir bereits bei den Betrachtungen der Kantenumgebung $\boxed{1}$ untersucht. Legen wir also zwischen $(3,3,3)$ und $(3,3,3,p)$ – mit $\boxed{2}$ – einen $(3,3,3,3)$. An den Kanten zwischen $(3,p,3,3)$ und $(3,3,3,3)$ passt aber, wie im Abschnitt zu $\boxed{1}$ gesehen, nur $\boxed{54}$ mit $q = 3$, also ein weiteres $(3,p,3,3)$. Damit erhalten wir eine Kantenumgebung mit $(3,3,3,3)(3,3,3)(3,3,3,3)(3,3,3,p)$. Diese existiert ebenfalls nicht. $\boxed{2}$ kann folglich nicht vorkommen.

C.4.4 Die Kantenumgebungen $\boxed{3}$ bis $\boxed{10}$

Diese Kantenumgebungen sind nur für $p < 14$ möglich, wurden somit in Kapitel 7 schon berücksichtigt.

C.4.5 Die Kantenumgebung $\boxed{11}$

Hier fangen wir mit $(3,3,3,p)(3,4,4)(3,4,4)$ an. Zwischen dem inneren $(3,3,3,p)$ und einem $(3,4,4)$ können wir entweder mit $\boxed{12}$ (zumindest für $p < 16$) ein $(3,4,3,3)$ oder mit $\boxed{11}$ einen weiteren $(3,4,4)$ anbauen. Im ersten Fall benötigen wir dann eine Kante mit $(3,p,3,3)(3,3,3,4)$, welche $\boxed{54}$, $q = 4$, mit einem weiteren $(3,p,3,3)$ erfüllt. Weil die innere Zelle pro Ecke vier Flächen hat, suchen wir jetzt an der Kante, die die innere Zelle nur an einer Ecke berührt, eine 4-Zellen-Kantenumgebung mit $(3,3,3,p)(3,4,3,3)(4,4,3)$. Diese existiert aber nicht. Betrachten wir also den zweiten Fall mit einem weiteren $(3,4,4)$ am inneren $(3,3,3,p)$. An den Kanten zwischen $(3,p,3,3)$ und $(3,4,4)$ können wir entweder $\boxed{82}$ mit $(3,p,3,3)(3,4,4)(4,4,3)(p,4,4)$ – Fall $\langle i \rangle$ – oder $\boxed{53}$ mit $(3,p,3,3)(3,4,4)(p,4,4)$ – Fall $\langle ii \rangle$ – anbringen. Verwenden wir $\langle i \rangle$ an zwei benachbarten Kanten eines p -Ecks des inneren $(3,3,3,p)$, dann bekommen wir die Kantenumgebung $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)(3,4,4)(3,4,4)$, welche nicht existiert, da dessen Keilwinkelsumme genau 2π ergibt. Kombinieren wir also $\langle i \rangle$ mit $\langle ii \rangle$. Dann benötigen wir $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)(3,4,4)(4,4,p)$, welche sich nicht einmal schließt. Benutzen wir also an den beiden benachbarten p -Eck-Kanten zweimal $\langle ii \rangle$. Jetzt erhalten wir die Kantenumgebung $(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)(4,4,p)$, die mit $\boxed{86}$ und $q = r = s = 3$ auch für alle p erlaubt ist. Die

so gefundene Eckenumgebung können wir widerspruchsfrei auf alle Ecken übertragen, bis sich das Polychor schließt. Wir haben ein **p -antiprismatisches Prismachor $H(3,3,3,p)$** konstruiert.

C.4.6 Die Kantenumgebungen [12](#) bis [16](#)

Auch diese Kantenumgebungen sind nur für $p < 14$ möglich und wurden somit in Kapitel 7 berücksichtigt.

C.4.7 Die Kantenumgebung [17](#)

[17](#) ist die Kantenumgebung $(3,3,3,p)(3,q,3,3)(3,q,3,3)$, wobei $p < 2q$ sein muss. Wenn wir mit [17](#) anfangen, können wir an den p -Ecken nur weitere $(3,3,3,p)$ ankleben, die dann mit einigen 3-Ecken der $(3,3,3,q)$ zusammenfallen. Dann muss es eine Kantenumgebung mit $(3,3,3,p)(3,3,3,q)$ geben. Für große p erfüllt dies nur [27](#) mit $q = 3$. Damit ist $p < 6$. Dieser Fall wurde ebenfalls bereits in Kapitel 7 behandelt.

C.4.8 Die Kantenumgebungen [18](#) bis [26](#)

Diese Kantenumgebungen sind ebenfalls nur für $p < 14$ möglich und somit in Kapitel 7 behandelt worden.

C.4.9 Die Kantenumgebung [27](#)

Die Kantenumgebung $(3,3,3,p)(3,3,3,q)(3,3,3)$ ist nur für große p möglich, wenn $q = 3$ ist. Dieser Fall ist aber bei der Bearbeitung der Kantenumgebung [2](#) schon ausgeschlossen worden.

C.4.10 Die Kantenumgebungen [28](#) bis [52](#)

Diese Kantenumgebungen sind nur für $p < 14$ möglich und in Kapitel 7 schon behandelt worden.

C.4.11 Die Kantenumgebung [53](#)

An der Kantenumgebung $(3,p,3,3)(3,p,3,3)(3,3,3)$ können wir zwischen dem ersten $(3,3,3,p)$ und dem $(3,3,3)$ mit [1](#) oder [2](#) nur einen weiteren $(3,3,3)$ oder einen $(3,3,3,3)$ platzieren. Im ersten Fall haben wir nun das Problem, dass dieser zweite $(3,3,3)$ über Flächen an beide $(3,3,3,p)$ anstoßen muss. Damit

würden aber auch mindestens zwei 3-Ecke der beiden $(3,3,3,p)$ zusammenfallen. Da diese beiden auch schon an p -Ecken aneinander grenzen, würde es eine Kante geben, um die herum nur zwei Zellen, nämlich diese beiden $(3,p,3,3)$, liegen. Dies ist natürlich nicht möglich. Somit müssen wir laut zweitem Fall ein $(3,3,3,3)$ zwischen dem $(3,3,3)$ und dem ersten $(3,3,3,p)$ anbauen. Dieses $(3,3,3,3)$ berührt dann aber auch ein 3-Eck des zweiten $(3,3,3,q)$, welches zum $(3,3,3)$ benachbart ist. Zwischen diesem $(3,3,3,3)$ und beiden $(3,3,3,p)$ passt gegenüber vom ersten $(3,3,3)$ jetzt nur noch ein zweiter $(3,3,3)$. Damit haben wir eine erste Ecke vollständig mit Zellen umgeben. Diese Konstruktion können wir ohne Widerspruch um das p -Eck herum fortführen, immer an den Kanten ein $(3,3,3)$ und an den Ecken ein $(3,3,3,3)$. Allerdings liegen jetzt an den Ecken der äußeren beiden p -Ecke immer schon zwei $(3,3,3,3)$. Dadurch ist die Eckentransitivität gebrochen und gezeigt, dass $\boxed{53}$ für große p nicht möglich ist.

C.4.12 Die Kantenumgebung $\boxed{54}$

Mit $\boxed{54}$ haben wir die Kantenumgebung $(3,p,3,3)(3,p,3,3)(3,3,3,3)$ bezeichnet. Fangen wir mit einem $(3,3,3,p)$ in der Mitte an, setzen ans obere p -Eck ein zweites $(3,3,3,p)$ und an eine gemeinsame Kante ein $(3,3,3,3)$. Dann können wir zwischen dem ersten $(3,3,3,p)$ und dem $(3,3,3,3)$ entweder nach $\boxed{2}$ ein $(3,3,3)$ mit beliebig großem p , nach $\boxed{17}$ (mit $q = 3$) einen weiteren $(3,3,3,3)$ und $p < 6$ oder nach $\boxed{29}$ einen $(3,3,3,3,3)$, allerdings nur mit $p < 4$, anlegen. Die letzten beiden Fälle sind wegen des kleinen p schon in Kapitel 7 besprochen worden. Somit befestigen wir an einer Kante zwischen dem ersten $(3,3,3,p)$ und dem $(3,3,3,3)$ ein $(3,3,3)$. Mit derselben Argumentation müssen wir an der anderen Kante zwischen dem $(3,3,3,3)$ und dem ersten $(3,3,3,p)$ ebenfalls ein $(3,3,3)$ ankleben. Um nun an dem unteren p -Eck Eckentransitivität zu den Ecken des oberen p -Ecks zu bekommen, bauen wir dort ein weiteres $(3,p,3,3)$ an und betrachten die Ecke des unteren p -Ecks zwischen den beiden $(3,3,3)$. An dieser Ecke gibt es keine Kantenumgebung $\boxed{54}$. Diese finden wir aber an Ecken des oberen p -Ecks. Also können wir keine Drehspiegelung finden, die die eine Ecke in die andere überführt und das Polychor unverändert lässt. Somit kann $\boxed{54}$ nicht vorkommen.

C.4.13 Die Kantenumgebungen $\boxed{55}$, $\boxed{56}$ und $\boxed{57}$

Die Kantenumgebung $(3,p,3,3)(3,p,3,3)(3,3,3,3,x)$, $x = 3, 4$ oder 5 , kann es für beliebig große p nicht geben, weil wir keine Kantenumgebung mit $(3,3,3,3,x)(3,3,3,p)$ finden, außer für $p = 3$ oder 4 , welche in Kapitel 7 schon berücksichtigt wurden.

C.4.14 Die Kantenumgebung [\[58\]](#)

Betrachten wir die Kantenumgebung $(3,p,3,3)(p,4,4)(3,4,4)$ für $p > 14$ und setzen das $(3,p,3,3)$ nach innen. Dann kann an beide p -Ecke – aufgrund von Eckentransitivität und der Tatsache, dass $(3,p,3,3)$ und $(p,4,4)$ sehr große Raumwinkel haben und somit eine andere Kombination als p -Eck auf p -Eck ausgeschlossen ist – nur je ein $(p,4,4)$ angelegt werden. An eine Kante zwischen dem $(3,p,3,3)$ und dem ersten $(p,4,4)$ legen wir jetzt mit der Kantenumgebung [\[58\]](#) einen $(3,4,4)$ an. Dann muß es eine Kante zwischen dem $(3,p,3,3)$ und dem zweiten $(p,4,4)$ geben, die an der Ecke des inneren 3-Ecks des $(3,4,4)$ liegt, welches nicht das erste $(p,4,4)$ berührt, und an dieser Kante muss durch Eckentransitivität ein weiteres $(3,4,4)$ anliegen. Damit berühren sich aber die beiden $(3,4,4)$ an einem 4-Eck. Da das $(3,p,3,3)$ an jeder Ecke vier Flächen hat, haben wir also um die gemeinsame Kante der beiden $(3,4,4)$ eine 4-Zellen-Kantenumgebung mit zwei $(4,4,3)$, einer Zelle, die $(4,4,3)$ mit $(3,3,3,p)$ verbindet und dem $(4,4,p)$. Eine 5-Zellen-Kantenumgebung, die zusätzlich zwischen die $(3,4,4)$ und $(p,4,4)$ je eine Zelle legt, ist nicht möglich, da mindestens einmal $(3,4,4)$ und $(p,4,4)$ – nach [\[58\]](#) – an einem 4-Eck aneinander liegen. Die einzige Zelle, die zwischen $(4,4,3)$ und $(3,3,3,p)$ liegen kann und mit dem zweiten $(p,4,4)$ eine mögliche Kante – nämlich [\[58\]](#) – erzeugt, ist $(4,4,3)$; [\[12\]](#) mit $(3,4,3,3)$ würde nicht mit $(p,4,4)$ zusammenpassen. Damit haben wir eine Ecke vollständig umschlossen und die Kantenumgebungen [\[11\]](#), [\[58\]](#) und [\[85\]](#) (mit $q = r = s = 3$) benutzt. Diese Konstruktion führt dann eindeutig und widerspruchsfrei zu einem **p -antiprismatischen Prismachor $H(3,3,3,p)$** .

C.4.15 Die Kantenumgebungen [\[59\]](#), [\[60\]](#) und [\[61\]](#)

$(3,p,3,3)(p,4,4)(3,4,x,4)$ mit $x = 3, 4$ oder 5 kann nicht vorkommen, da wir dann eine Kantenumgebung mit $(3,3,3,p)(3,4,x,4)$ hätten, die es – außer für alle x für $p = 3$ und für $x = 3$ auch für $p = 4$ – nicht gibt.

C.4.16 Die Kantenumgebung [\[62\]](#)

Die Kantenumgebung $(3,p,3,3)(p,4,4)(3,4,3,3,3)$ kann auch nicht in einem uniformen Polychor vorkommen, da wir an der Kante mit $(3,3,3,3,4)(3,3,3,p)$ – außer für $p = 3$ oder 4 – nicht weiterkonstruieren können.

C.4.17 Die Kantenumgebung 63

$(3,p,3,3)(p,4,4)(3,4,3,3)$ ist als Kantenumgebung nicht möglich, da $(3,3,3,4)(3,3,3,p)$ nur für $p \leq 5$ existiert.

C.4.18 Die Kantenumgebung 64

Hier fangen wir mit der Umgebung $(4,4,p)(q,4,4)(q,4,4)$ für großes p und beliebiges q an. Da alle Raumwinkel sehr groß sind, können wir auf den freien p -Ecken nur $(3,p,3,3)$ oder $(p,4,4)$ ankleben. Im ersten Fall erhalten wir eine Kantenumgebung mit $(p,4,4)(3,p,3,3)(4,4,q)$ welche nur für $q = 3$ und der vierten Zelle $(3,4,4)$ – als 82 – möglich ist. Da nun $(3,p,3,3)$ an jeder Ecke vier Flächen hat, benötigen wir um eine Kante zwischen zwei $(q,4,4)$ – mit $q = 3$ – drei $(3,4,4)$, was zur Kantenumgebung $(3,4,4)(3,4,4)(4,4,3)(4,4,3)(4,4,3)$ führt; diese hat aber als Keilwinkelsumme genau 2π . Also ist der erste Fall nicht möglich. Beim zweiten Fall legen wir auf die freien p -Ecke je ein weiteres $(p,4,4)$. Zwischen zwei $(p,4,4)$ kann nun eine 3-Zellen-Kantenumgebung mit dem $(4,4,q)$ oder eine 4-Zellen-Kantenumgebung mit $(4,4,3)(4,4,3)$, $(4,4,3)(4,4,4)$ oder $(4,4,3)(4,4,5)$ und $q = 3, 4$ oder 5 auftreten. Bei der Möglichkeit mit vier Zellen kleben wir über dem zweiten $(p,4,4)$ ein letztes $(p,4,4)$, und zwischen diesen beiden aufgrund der Eckentransitivität wieder eines der drei 4-Zellen-Kantenumgebungen liegen. O.B.d.A. sei nun das $(4,4,3)$ am zweiten $(p,4,4)$ und ein $(4,4,x)$, $x = 3, 4$ oder 5 , am ersten und letzten $(p,4,4)$. Dann bricht aber die Eckentransitivität an den Ecken des $(4,4,3)$ zusammen, die nicht am zweiten $(p,4,4)$ liegen, denn es treten jetzt schon ein $(4,4,3)$ und zwei $(4,4,x)$ auf. Also können zwischen den $(p,4,4)$ nur 3-Zellen-Kantenumgebungen mit dem $(4,4,q)$, q beliebig groß, liegen. Damit wird die Eckentransitivität erfüllt und eine widerspruchsfreie Konstruktion bis zum Schließen des Polychors möglich. Das entstehende Polychor ist ein **p, q -Biprismachor $T(p, q)$** .

C.4.19 Die Kantenumgebung 65

Diese Kantenumgebung besteht aus $(4,4,p)$, $(3,4,4)$ und $(3,4,3,3)$, wobei nach der Keilwinkelsummenbegrenzung p kleiner als 27 bleiben muss. An einer Kante zwischen $(p,4,4)$ und $(3,4,3,3)$ passen jetzt mit 82 noch die Zellen $(3,4,4)$ und $(4,4,3)$, mit 83 die Zellen $(3,3,3)$ und $(3,4,4)$ oder mit 84 die Zellen $(3,3,3)$ und $(3,q,3,3)$. In den beiden ersten Fällen muss dann allerdings $p = 4$ gelten. Nur der dritte Fall gilt für beliebig große p . An einer Kante zwischen $(p,4,4)$ und $(4,4,3)$ passen entweder – nach 64 mit p und q vertauscht und $q = 3$ – ein weiteres $(p,4,4)$ oder – nach 82 – ein $(3,4,4)$ und ein $(3,p,3,3)$ oder – nach 87, 88 bzw. 89 – ein $(4,4,x)$ und ein $(p,4,4)$ mit $x = 3, 4$ bzw.

5. Der erste und die letzten drei Fälle können nicht vorkommen, da wir aus der Betrachtung der Kante zwischen $(p,4,4)$ und $(3,4,3,3)$ wissen, dass am p -Eck des $(p,4,4)$ nur ein $(3,p,3,3)$ anliegen kann. Jetzt finden wir aber eine Kante mit $(3,3,3,4)(3,4,4)(4,4,3)$, welche nicht existiert. Also ist der zweite Fall an der Kante zwischen $(p,4,4)$ und $(4,4,3)$ ebenfalls nicht möglich. Wir können somit zwischen diesen Zellen nicht weiterbauen. Folglich ist [65] keine erlaubte Kantenumgebung.

C.4.20 Die Kantenumgebungen [66] bis [76]

Diese Kantenumgebungen sind nur für $p < 14$ möglich, müssen also hier nicht mehr behandelt werden.

C.4.21 Die Kantenumgebung [77]

Für $x = 7, 8$ und 9 haben wir bei der Kantenumgebung $(4,4,p)(4,4,x)(4,4,r)$, $r = 3$, für wenige $p < 42$ durch die Keilwinkelsumme nicht ausgeschlossene Umgebungen. Diese sind aber für $14 < p < 42$ nicht möglich, da die Kantenumgebung $(p,4,4)(x,4,4)$ für diese p nicht existiert. Ist $r = 4$ und $x = 5$, so sind alle p bis 19 erlaubt. Aber auch hier gibt es keine Umgebung mit $(p,4,4)(5,4,4)$. Nur für $r = 4$, $x = 4$ und für $r = 3$ und $x \leq 6$ sind beliebig große p erlaubt. Im ersten Fall können wir zwischen $(p,4,4)$ und $(4,4,4)$ nach [64] – mit p und q vertauscht und $q = 4$, p beliebig – einen weiteren $(p, 4, 4)$ anbauen (Fall <i>) oder nach [88] die Zellen $(4,4,3)$ und $(p,4,4)$ (Fall <ii>) anfügen. <i> führt zu einer Eckenumgebung aus zwei $(p,4,4)$ und zwei $(4,4,4)$, welche widerspruchsfrei zu einem **4, p -Biprismachor $T(4,p)$** führt. <ii> benötigt eine Kante mit $(4,4,4)(4,4,4)(3,4,4)$, welche aber nicht existiert. Betrachten wir jetzt den Fall, dass $r = 3$ und $x \leq 6$ ist. Sei $x = 5$ oder 6 , dann finden wir aber keine Kantenumgebung mit $(p,4,4)(x,4,4)$. Sei also $x = 4$. An $(p,4,4)(4,4,4)$ können wir entweder mit [64] – p und q vertauscht und $q = 4$ – ein weiteren $(p,4,4)$ ergänzen (Fall <iii>) oder mit [88] die Zellen $(4,4,3)$ und $(p,4,4)$ an die Kante kleben (Fall <iv>). Für <iii> benötigen wir jetzt aber eine Kante mit $(4,4,p)(4,4,4)(3,4,4)$, die wir nicht finden. Und für <iv> bekommen wir eine Kante mit $(3,4,4)(4,4,4)(3,4,4)$, welche wir in der Nr. 965 in den Tabellen im Anhang A zusammen mit der Zelle $(3,3,3)$ finden. Der $(3,3,3)$ passt jetzt aber nicht mit dem $(4,4,p)$ zusammen. Also ist $x = 4$ auch ausgeschlossen. Als letztes sei $x = 3$. Dann können wir an $(p,4,4)(3,4,4)$ nur mit [83] und den Zellen $(3,3,3)$ und $(3,p,3,3)$ eine mögliche Kantenumgebung erhalten. Diese Umgebung müssen wir dann aber auch an der auf dem p -Eck benachbarten Kante, an der das andere $(3,4,4)$ sitzt, anbauen. Da $(3,p,3,3)$ vier Flächen pro Ecke hat, müssen wir an der Kante

$(3,3,3)(3,4,4)(3,4,4)(3,3,3)$ noch eine weitere Zelle anlegen, die auf einem 3-Eck des $(3,p,3,3)$ liegt. Nur ein dritter $(3,3,3)$ ist möglich, führt aber zu einer unmöglichen Kantenumgebung. Somit ist $x = 3$ ebenfalls nicht möglich.

C.4.22 Die Kantenumgebung [\[78\]](#)

Es existieren möglicherweise die Kantenumgebungen $(4,4,p)(4,4,q)(4,4,3,4)$ mit $q = 3$ und $p < 24$. Betrachten wir zuerst eine Kante zwischen $(p,4,4)$ und $(3,4,4)$. Dort passt mit [\[83\]](#) nur $(3,3,3)(3,p,3,3)$. Der $(4,4,3,4)$ kann nun zwischen $(4,4,p)$ und $(4,4,3)$ auf zwei verschiedene Arten angebaut werden, um [\[78\]](#) zu erzeugen. Im ersten Fall liegt er mit einem 4-Eck, das auf dem $(3,4,4,4)$ an allen Kanten wieder nur 4-Ecke berührt, auf dem $(4,4,p)$. Im zweiten Fall liegt es mit einem 4-Eck auf $(4,4,p)$, das auf dem $(3,4,4,4)$ zwischen zwei 3-Ecken sitzt. Im ersten Fall muss es aber dann eine Kante mit $(3,p,3,3)(p,4,4)(4,4,3,4)$ geben. Diese finden wir nicht. Im zweiten Fall erhalten wir die Kante $(3,p,3,3)(p,4,4)(3,4,4,4)$, welche durch [\[60\]](#) erlaubt ist. Da aber $(3,3,3,p)$ pro Ecke vier Flächen hat, benötigen wir eine 4-Zellen-Kantenumgebung mit $(3,3,3,p)(3,4,4)(3,4,4,4)$. Auch diese finden wir nicht. Somit ist [\[78\]](#) mit $q = 3$ und $14 < p < 24$ ausgeschlossen.

C.4.23 Die Kantenumgebung [\[79\]](#)

Diese Kantenumgebungen ist nur für $p = 3$ möglich und wurde in Kapitel 7 behandelt.

C.4.24 Die Kantenumgebung [\[80\]](#)

Diese Kantenumgebung ist $(p,4,4)(p,4,4)(4,4,3,4)$. Leider kann auch diese ausgeschlossen werden, da aus ihr eine Kantenumgebung mit $(4,4,p)(3,4,4,4)$ folgt, welche nur für $p < 7$ existiert.

C.4.25 Die Kantenumgebung [\[81\]](#)

Diese Kantenumgebung ist $(3,p,3,3)(3,p,3,3)(3,3,3)(3,3,3)$. Legen wir zwei $(3,p,3,3)$ an einem p -Eck zusammen und betrachten zwei benachbarte Kanten k_1 und k_2 auf diesem p -Eck. Sei e_1 die Ecke zwischen k_1 und k_2 . An k_1 legen wir mit [\[81\]](#) zwei $(3,3,3)$ an. Dann haben wir zwischen den $(3,3,3)$ und den beiden $(3,3,3,p)$ an den 3-Ecken, die an e_1 anstoßen, drei Möglichkeiten: Mit [\[1\]](#) kann an beiden 3-Ecken je ein weiteres $(3,3,3)$ anliegen (Fall <i>i</i>), mit [\[2\]](#) kann an beiden 3-Ecken je ein $(3,3,3,3)$ anliegen (Fall <i>ii</i>) oder an dem einen 3-Eck liegt ein $(3,3,3)$ und am anderen ein $(3,3,3,3)$ an (Fall

$\langle iii \rangle$). Im Fall $\langle i \rangle$ erhalten wir eine Kante mit $(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)(3,3,3)$, an der noch eine Zelle fehlt. Mit Nr. 999 in den Tabellen im Anhang A kann diese fünfte Zelle nur ein weiterer $(3,3,3)$ sein. Dieser passt aber nicht in die Lücke aus vier 3-Ecken um e_1 . $\langle i \rangle$ kann also nicht vorkommen. Im Fall $\langle ii \rangle$ können wir zwischen den $(3,3,3,3)$ und den $(3,3,3,p)$ an die 3-Ecke, die an k_2 angrenzen, für beliebig große p mit $\boxed{2}$ nur je einen weiteren $(3,3,3)$ anbauen. Damit brechen wir aber die Eckentransitivität, da jetzt Ecken existieren, an denen $(3,3,3,3)$ nur an eine Ecke eines p -Ecks berühren, und andere, an denen $(3,3,3,3)$ auch mit einer Kante eines p -Ecks anstoßen. Also kann $\langle ii \rangle$ nicht vorkommen. Im Fall $\langle iii \rangle$ wird an e_1 am ersten $(3,3,3)$ ein weiterer $(3,3,3)$ und am zweiten $(3,3,3)$ ein $(3,3,3,3)$ angeklebt. Die entstehende Lücke an e_1 besteht aus drei 3-Ecken, kann somit nur durch ein $(3,3,3)$ aufgefüllt werden. Aber auch dann brechen wir die Eckentransitivität, da es wieder Ecken eines p -Ecks gibt, an dessen Kanten $(3,3,3,3)$ vorkommen, und andere, an denen sie nicht vorkommen. Also ist Fall $\langle iii \rangle$ und damit die ganze Kantenumgebung $\boxed{81}$ ausgeschlossen.

C.4.26 Die Kantenumgebung $\boxed{82}$

Fangen wir mit der Kantenumgebung $(3,p,3,3)(p,4,4)(4,4,3)(3,4,4)$ an und betrachten eine Ecke e dieser Kante. An der Kante zwischen $(4,4,p)$ und $(3,4,4)$ an e passt mit $\boxed{64}$ – und $q = 3$ – ein weiteres $(3,4,4)$ (Fall $\langle i \rangle$) oder mit $\boxed{65}$ – und $p < 27$ – ein $(3,4,3,3)$ (Fall $\langle ii \rangle$). Für Fall $\langle ii \rangle$ erhalten wir dann an e eine Kante zwischen $(p,4,4)$ und $(3,4,3,3)$, die nur mit $\boxed{63}$ und einem $(3,p,3,3)$ erlaubt ist. Jetzt finden wir aber an e und zwischen $(3,3,3,p)$ und $(3,3,3,4)$ eine Kante, die wir nur mit $\boxed{3}$ – und einem $(3,3,3)$ – oder mit $\boxed{38}$ – und einem $(3,3,3,3)$ – ergänzen können. Für die erste Möglichkeit bekommen wir dann die Einschränkung $p < 12$, für die zweite (mit $q = 4$ und $r = 3$ in $\boxed{38}$) sogar $p < 4$. Diese Fälle sind aber schon in Kapitel 7 behandelt worden. Gehen wir jetzt zu einer Kante zwischen $(3,3,3,p)$ und $(3,4,4)$, die wiederum an e liegt. Hier passt mit $\boxed{11}$ entweder ein weiterer $(3,4,4)$ (Fall $\langle iii \rangle$) oder mit $\boxed{12}$ ein $(3,4,3,3)$ (Fall $\langle iv \rangle$), allerdings mit $p < 16$. Mit $\langle iv \rangle$ erhalten wir aber wieder eine Kante mit $(3,3,3,p)(3,3,3,4)$, was nur für kleine p möglich ist. Also setzen wir mit $\langle iii \rangle$ auf das 3-Eck des $(3,3,3,p)$, das e berührt und mit der Kante nicht am $(p,4,4)$ liegt, ein $(3,4,4)$. An der freien Kante zwischen diesem $(3,4,4)$ und dem $(3,3,3,p)$ passt nun wieder mit $\boxed{11}$ ein letzter $(3,4,4)$ (Fall $\langle v \rangle$) oder mit $\boxed{12}$ ein $(3,4,3,3)$ mit $p < 16$ (Fall $\langle vi \rangle$). $\langle vi \rangle$ führt zu einer Kante mit $(p,4,4)(3,p,3,3)(3,3,3,4)$, welche für große p nicht existiert. Bleiben also Fall $\langle i \rangle$, $\langle iii \rangle$ und $\langle v \rangle$ nur mit $(3,4,4)$. Jetzt bekommen wir aber eine Kante an e mit $(3,4,4)(3,4,4)(4,4,3)(4,4,3)$. Dessen Keilwinkelsumme ist genau 2π und somit ausgeschlossen. Also kann

[82] nicht vorkommen.

C.4.27 Die Kantenumgebung [83]

Diese Kantenumgebung ist $(3,p,3,3)(p,4,4)(3,4,4)(3,3,3)$. Sei wieder e eine Ecke an dieser Kante. An e und zwischen $(4,4,p)$ und $(4,4,3)$ passt entweder mit [77] ein $(4,4,x)$, $x = 3, \dots, 6$ (Fall <i>), mit [78] ein $(4,4,3,4)$, $p < 24$ (Fall <ii>) oder mit [86] und $q = r = s = 3$ zwei weitere $(4,4,3)$ (Fall <iii>). Im Fall <i> betrachten wir nun die Kante $(3,p,3,3)(p,4,4)(x,4,4)$. Für $x = 3$ haben wir die Möglichkeiten [58] oder [83]. [58] ist schon die gesuchte Kantenumgebung. Allerdings fallen nun der $(3,3,3)$ und das $(3,3,3,p)$ an zwei Flächen zusammen und bilden eine Kante mit nur zwei Zellen. Dies ist nicht möglich. Mit [83] wird ein weiterer $(3,3,3)$ addiert. Für $x = 4, 5$ oder 6 existiert eine entsprechende Kante nicht. Im Fall <ii> gibt es für den $(3,4,4,4)$ zwei Möglichkeiten, da einmal das 4-Eck zum $(4,4,p)$ auf dem $(3,4,4,4)$ an Kanten nur mit 4-Ecken oder auch mit zwei 3-Ecken zusammenkommt. Die erste Möglichkeit führt zu einer Kante mit $(3,p,3,3)(p,4,4)(4,4,3,4)$, welche nicht existiert. Die zweite Möglichkeit lässt wieder den $(3,3,3)$ und den $(3,3,3,p)$ an zwei Flächen zusammenfallen, ist also auch nicht möglich. Kommen wir somit zu <iii>. Wir erhalten eine Kante mit $(3,p,3,3)(p,4,4)(3,4,4)$. Diese existiert mit [58] oder zusammen mit einem weiteren $(3,3,3)$ ([83]). [58] lässt dann aber wieder den $(3,3,3)$ und den $(3,3,3,p)$ zusammenfallen. Und [83] mit einem weiteren $(3,3,3)$ haben wir auch schon im Fall <i> mit $x = 3$ gefunden. Damit muss an dem 3-Eck des $(3,3,3,p)$, das an $(4,4,p)$ und an e liegt, ein $(3,3,3)$ kleben. Kommen wir jetzt zum 3-Eck des $(3,3,3,p)$, das e berührt und mit einer Kante nicht am $(4,4,p)$ anstößt. Hier kann mit [1] ein $(3,3,3)$ oder mit [2] ein $(3,3,3,3)$ angebaut werden. Der $(3,3,3)$ führt aber dazu, dass die drei $(3,3,3)$ eine gemeinsame Kante an e haben, die zu den $(3,4,4)$ zeigt. Diese haben aber keine gemeinsame Kante, passen also mit den drei $(3,3,3)$ nicht zusammen. Anders der $(3,3,3,3)$: Beide $(3,3,3)$ kleben an den beiden $(3,4,4)$, die mit der Fläche am $(4,4,p)$ liegen, während der $(3,3,3,3)$ mit einer Fläche das dritte $(3,4,4)$ berührt. Jetzt erhalten wir eine Kante mit $(3,3,3)(3,3,3,3)(3,4,4)(3,4,4)$. Dessen Keilwinkelsumme ist aber genau 2π . Somit ist auch diese Konstruktion verboten und [83] ausgeschlossen.

C.4.28 Die Kantenumgebung [84]

Bei [84] kommen die Zellen $(3,p,3,3)$, $(p,4,4)$, $(3,4,3,3)$ und $(3,3,3)$ an einer Kante vor. Zwischen $(4,4,p)$ und $(3,4,3,3)$ passt dann nur mit [65] ein $(3,4,4)$, wobei $p < 27$ gelten muss. Jetzt bekommen wir eine Kante mit $(3,p,3,3)(p,4,4)$

(4,4,3). Dort können wir mit [82] nur einen (3,4,4) anlegen. Dann erhalten wir aber eine Kante mit (4,4,3)(3,4,4)(3,3,3,4), welche nicht existiert.

C.4.29 Die Kantenumgebung [85]

[85] ist nur für $p < 7$ möglich und ist somit in Kapitel 7 bei den Betrachtungen für Zellen mit p -Ecken und $p \leq 14$ behandelt worden.

C.4.30 Die Kantenumgebung [86]

Hier betrachten wir die Kantenumgebung $(4,4,p)(4,4,q)(4,4,r)(4,4,s)$ mit $q = r = s = 3$. Zwischen $(p,4,4)$ und $(3,4,4)$ passt entweder mit [58] ein $(3,p,3,3)$ oder mit [83] $(3,3,3)$ und $(3,p,3,3)$. Im ersten Fall erhalten wir eine vollständige Eckenumgebung, die sich widerspruchsfrei auf alle Ecken fortführen lässt. Damit bekommen wir ein **p -antiprismatisches Prismachor $H(3,3,3,p)$** . Im zweiten Fall kann an der Kante des p -Ecks, die neben der zwischen $(3,4,4)$ und $(3,3,3)$ liegt und an einem $(3,4,4)$ angrenzt, auch nur mit [83] ein weiterer $(3,3,3)$ angefügt werden. Denn bei der Benutzung von [58] fallen das $(3,3,3,p)$ und der $(3,3,3)$ wieder an zwei Flächen zusammen. Damit jetzt aber die drei Flächen der drei $(3,4,4)$ mit den beiden $(3,3,3)$ zusammenpassen, muß dazwischen noch eine Zelle eingefügt werden. [1] mit einem $(3,3,3)$ ist ausgeschlossen, da dann die drei $(3,3,3)$ wieder eine gemeinsame Kante haben und nicht mit den drei $(3,4,4)$ zusammenzufügen sind. Also kann hier mit [2] nur ein $(3,3,3,3)$ angelegt werden, der dann mit einem 3-Eck das mittlere $(3,4,4)$ berührt. Damit erhalten wir aber eine Kante mit $(3,3,3)(3,4,4)(3,4,4)(3,3,3,3)$, deren Keilwinkelsumme 2π beträgt. Wir können [86] folglich auch nicht benutzen.

C.4.31 Die Kantenumgebung [87]

Betrachten wir nun die Umgebung $(p,4,4)(p,4,4)(4,4,3)(4,4,3)$. An den Kanten zwischen $(4,4,p)$ und $(3,4,4)$ passt mit [64], $q = 3$, ein $(3,4,4)$ oder mit [65] ein $(3,4,3,3)$. Letzteres ist aber nicht möglich, da dann eine Kante mit $(p,4,4)(p,4,4)(3,4,3,3)$ benötigt wird, die es nicht gibt. Also setzen wir zwischen den $(4,4,p)$ und den $(3,4,4)$ überall einen weiteren $(3,4,4)$. Damit erhalten wir eine vollständige Eckenumgebung aus zwei $(p,4,4)$ und vier $(3,4,4)$. An den freien p -Ecken müssen weitere $(p,4,4)$ und an den Kanten mit $(p,4,4)(p,4,4)(4,4,3)$ noch je ein weiterer $(4,4,3)$ angefügt werden. Dann gibt es aber Ecken, an denen jetzt acht $(3,4,4)$ anliegen, wodurch die Eckentransitivität gebrochen wird. Also kann [87] nicht benutzt werden.

C.4.32 Die Kantenumgebung 88

88 ist $(p,4,4)(p,4,4)(4,4,3)(4,4,4)$. Schauen wir uns die Kante zwischen $(4,4,p)$ und $(3,4,4)$ an, dann können wir dort entweder mit 64 und $q = 3$ ein $(3,4,4)$ oder mit 65 ein $(3,4,3,3)$ anlegen. Wie bei 87 aber schon gesehen, führt ein $(3,4,3,3)$ zu der nicht existenten Kante $(p,4,4)(p,4,4)(3,4,3,3)$. Also muss hier ein $(3,4,4)$ angelegt werden. Jetzt betrachten wir die Kante zwischen $(4,4,p)$ und $(4,4,4)$. Dort können entweder mit 64 und $q = 4$ ein $(4,4,4)$ (Fall $\langle i \rangle$), mit 70 ein $(4,4,3,4)$ (Fall $\langle ii \rangle$), mit 77 und $r = 3$ und $q = 4$ ein $(4,4,3)$ (Fall $\langle iii \rangle$) oder mit 86 und $q = r = 3$ und $s = 4$ zwei $(4,4,3)$ (Fall $\langle iv \rangle$) angelegt werden. Die Fälle $\langle ii \rangle$ und $\langle iv \rangle$ sind aber nur für kleine p erlaubt, sind also in Kapitel 7 schon behandelt worden. Im Fall $\langle i \rangle$ erhalten wir eine Kante mit $(3,4,4)(3,4,4)(4,4,4)(4,4,4)$, dessen Keilwinkelsumme wieder 2π ergibt. Und im Fall $\langle iii \rangle$ finden wir eine Kante mit $(3,4,4)(4,4,4)(3,4,4)(3,4,4)$, welche nicht existiert. Also kann auch 88 nicht benutzt werden.

C.4.33 Die Kantenumgebung 89

Die letzte Kantenumgebung lautet $(p,4,4)(p,4,4)(4,4,3)(4,4,5)$. Zwischen dem $(4,4,p)$ und dem $(3,4,4)$ passt wieder nur ein $(3,4,4)$ (mit 64), da mit 65 und einem $(3,4,3,3)$ wieder die nicht existente Kante $(p,4,4)(p,4,4)(3,4,3,3)$ benötigt wird. Und zwischen $(4,4,p)$ und $(5,4,4)$ passt entweder mit 64 und $q = 5$ ein weiterer $(5,4,4)$ oder mit 71 ein $(4,5,4,3)$, wobei dann aber $p < 7$ sein muss. Somit ist ein weiterer $(5,4,4)$ die einzige Möglichkeit. Jetzt finden wir aber eine Kante mit $(3,4,4)(3,4,4)(5,4,4)(5,4,4)$, dessen Keilwinkelsumme wieder 2π ist. Folglich kann auch 89 nicht für die Konstruktion eines uniformen Polychors verwendet werden.

C.4.34 Zusammenfassung

Für beliebig große $p > 14$ haben wir mit Hilfe kombinatorischer Überlegungen und der Beschränkung durch die Keilwinkelsumme somit gezeigt, dass wir mit p -Prismen und p -Antiprismen lediglich p -antiprismatische Prismachora $H(3,3,3,p)$ und p, q -Biprismachora $T(p,q)$ herstellen können. Folglich ist die Behauptung in Kapitel 2, für $p > 14$ gäbe es keine neuartigen Polychora, bewiesen.

Anhang D

Hilfen bei der Visualisierung

„Die Mathematik ist das einzige Reich der wahrhaft exakten Phantasie.“

Hans Saner

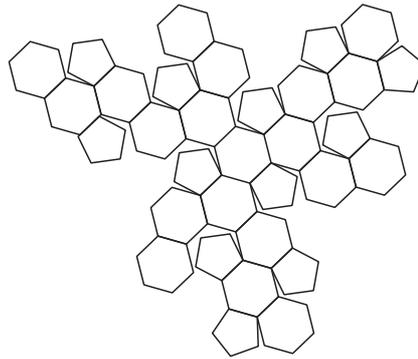
Das Arbeiten mit geometrischen Objekten in Dimensionen höher als drei geht meistens einher mit einem teilweisen bis fast kompletten Verlust an Anschauung. Um dieses Problem – zumindest für diese Arbeit – ein wenig aus dem Weg zu räumen, sollen an dieser Stelle einige Hilfestellungen gegeben werden. Dabei nutzen wir die gleichen oder ähnliche Prinzipien wie die, 3-dimensionale Objekte auf ein 2-dimensionales Blatt Papier zu bannen: Abwicklungen und Projektionen.

D.1 Abwicklungen

Wenn wir uns mit 3-dimensionalen Polyedern befassen, dann stellt sich meistens schnell die Frage, ob nicht ein paar davon gebaut werden könnten, um das (wortwörtliche) Begreifen zu erleichtern. Diese Baupläne müssen dann natürlich die Teile der Polyeder, die Flächen, genau darstellen und deren Zusammenhang auf gewisse Art eindeutig machen. Natürlich können wir acht regelmäßige 3-Ecke gleicher Größe aus Pappe ausschneiden und so zusammenkleben, dass ein Oktaeder entsteht. Viel geschickter (und klebesparender) ist es, die Flächen so auszuschneiden, dass sie von vornherein zusammenhängen; wir müssen nur zwischen den Flächen falten und schon sollte es einfach sein, diejenigen Kanten der Flächen zu identifizieren, die zusammengeklebt werden müssen.

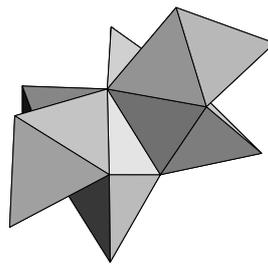
Ein sehr einfaches Beispiel ist eine Abwicklung des Hexaeders: vier Quadrate in einer Reihe von oben nach unten, am zweiten von oben jeweils links

und rechts noch ein weiteres, so dass eine Art Kreuz entsteht. Ein etwas komplizierteres Beispiel ist die Abwicklung des stumpfen Ikosaeders (auch Fußball genannt): Er besteht, wie man in der Abwicklung erkennt, aus 12 5-Ecken und 20 6-Ecken, jeweils fünf 6-Ecke um jedes 5-Eck.



Um aus der Abwicklung wieder ein 3-dimensionales Objekt zu erhalten, müssen sozusagen von innen heraus zuerst die Kanten zusammengeklebt werden, an denen schon alle Flächen an einer Ecke zusammenkommen. Dadurch bewegt man sich in der Abwicklung durch Zusammenkleben der Kanten immer weiter nach außen bzw. nach oben und schließt damit den Polyeder letztendlich.

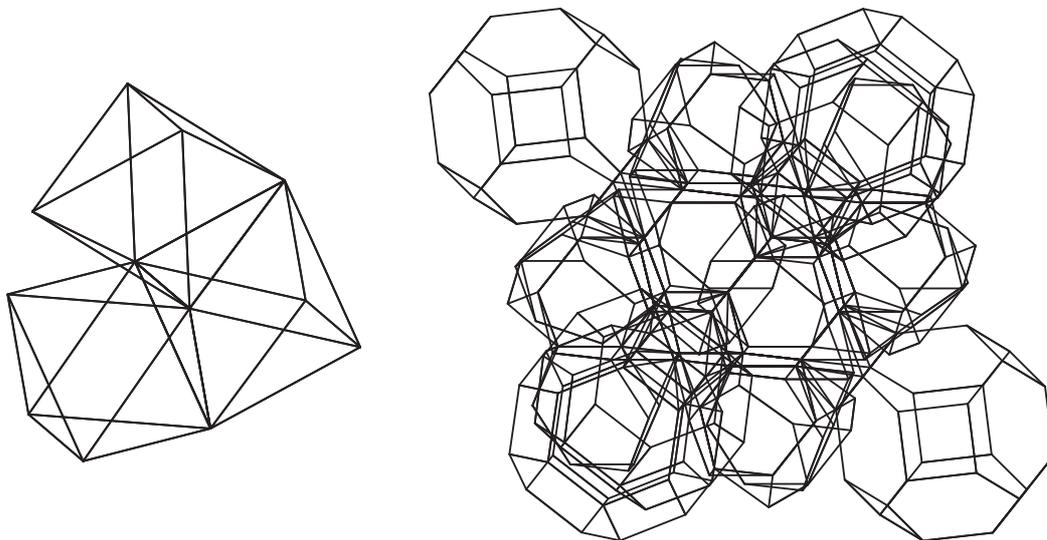
Analog können wir nun auch 4-dimensionale Polychora erst einmal als Abwicklung im 3-Dimensionalen aus seinen Teilen zusammenbauen. Auch hier lassen sich Anzahl der Teile und Orientierung/Zusammenhang teilweise gut ersehen.



Von den sechs regelmäßigen Polychora sind in dieser Arbeit Abwicklungen auf den Seiten 6, ??, 28, 33 und 34 zu sehen. In den meisten Fällen ist aber eine vollständige Abwicklung des ganzen Polychors nicht nötig. Bei den Kantenkombinationen können wir uns eine Abwicklung als das Zusammenkleben der einzelnen Zellen um eine Kante vorstellen, wobei eine Lücke zwischen den Zellen übrig bleibt. Selbst bei dem Beweis in Kapitel 7 benötigen wir nur

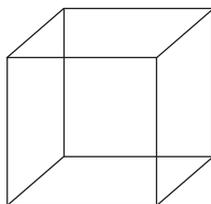
Teilabwicklungen, die meistens nur die Umgebung einer Ecke betreffen (siehe Seite 116 bis 123).

Obwohl (2-dimensionale) Abbildungen von 3-dimensionalen Abwicklungen kleiner 4-dimensionaler Objekte immer noch ein wenig anschaulich sind – zumindest kann die 3-dimensionale Struktur leicht gesehen werden – werden größere Objekte schnell unübersichtlich. In diesem Fall empfehle ich entweder die Zuhilfenahme von Computer-Programmen, mit denen man die Polyeder erzeugen und anschauen kann (z.B. auf <http://www.M@rcoMoeller.de> die Links zu uniformen Polychora), oder direkt den Selberbau der benötigten Polyeder. Nur so kann ein wirkliches Verständnis der Polychora durch Abwicklungen erreicht werden.

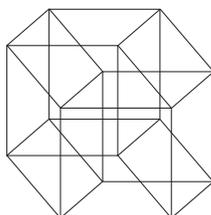


D.2 Projektionen

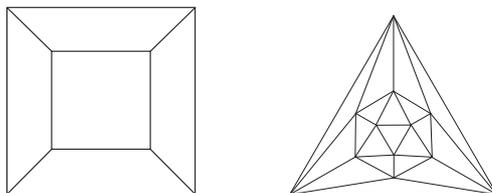
Prinzipiell gibt es zwei Arten von Projektionen, die auch bei der Abbildung 3-dimensionaler Objekte auf die Ebene Verwendung finden: Parallel- und Zentralprojektionen. Bei der Parallelprojektion wird die dritte Richtung, die sich nicht mehr in der Ebene darstellen lässt, einfach in eine beliebige andere Richtung (nach „hinten“ ist dann meistens – zusammen mit einer Stauchung – nach oben rechts) auf die Ebene projiziert. So wird ein Hexaeder zu einem Quadrat, über das ein zweites Quadrat leicht nach oben rechts versetzt gezeichnet wird und die korrespondierenden Ecken verbunden werden. In dieser Darstellung lernen Schulkinder auch oft zum ersten Mal das perspektivische Zeichnen von Häusern etc.



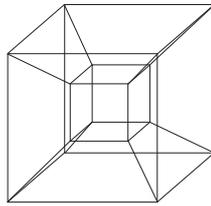
Auf die gleiche Art lassen sich 4-dimensionale Objekte in den 3-dimensionalen Raum (und dann wahrscheinlich noch einmal parallelprojiziert in die Ebene) darstellen. Dabei werden zwar die Zusammenhänge und die meisten Größen der Teile richtig dargestellt; allerdings wird es schwierig, sich Polychora vorzustellen, die über andere als rechte Winkel verfügen.



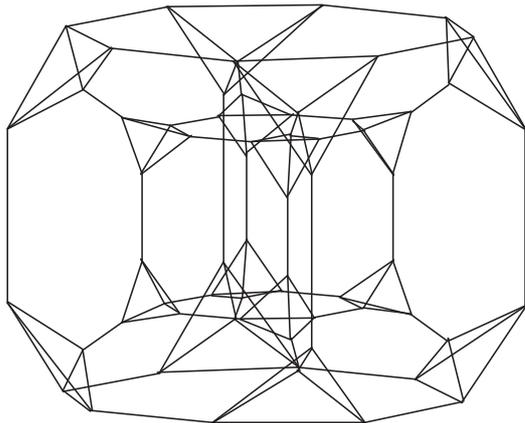
Für diesen Zweck ist die Zentralprojektion besser geeignet, denn die vierte Richtung – senkrecht zu den „normalen“ drei – ist dort besser zu erkennen. Bei den in dieser Arbeit betrachteten Objekten handelt es sich ausnahmslos um eckentranstive Polychora. Diese haben die Eigenschaft, dass alle Ecken auf einer Kugel liegen, keiner also weiter innen oder außen liegt. Diese Richtung – innen-außen – nutzt nun die Zentralprojektion. 3-dimensionale Polyeder werden auch zentral auf eine Ebene projiziert, indem ein Zentralpunkt z oberhalb des Polyeders gewählt und dann jede Ecke entlang einer gedachten Geraden durch z und die Ecke auf die Ebene geschoben wird. Dabei nehmen die Ecken die Kanten, die zu ihnen führen, mit.



In diesen Projektionen kann die ursprüngliche dritte Richtung gut als innen-außen identifiziert werden (links Hexaeder, rechts Ikosaeder – diese Darstellung wird auch Schlegel-Diagramm genannt). Somit lässt sich die Zentralprojektion auch auf 4-dimensionale Polychora anwenden: Die drei „normalen“ Richtungen bleiben erhalten, die vierte Richtung wird innen-außen. In dieser Arbeit sind die sechs regelmäßigen Polychora auf den Seiten 41, 42, 46, 47 und 48 als Zentralprojektionen abgebildet.

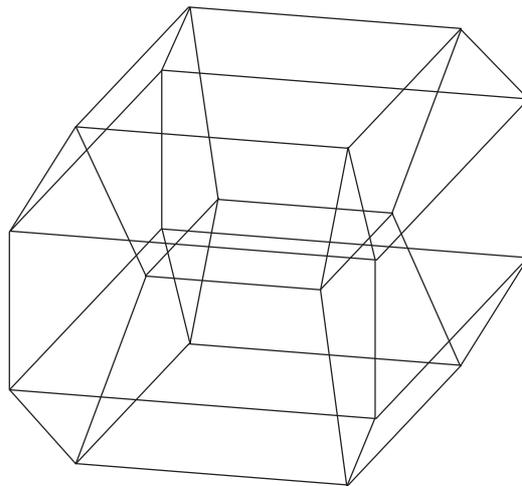


Auch kompliziertere Polychora, z.B. der stumpfe 8-Zeller oder das 4,5-Biprismachor, lassen sich immer noch relativ anschaulich darstellen. Aber auch hier entsteht bei komplexeren Objekten schnell das Problem, dass durch die zusätzliche Projektion in die Darstellungsebene zu viele Informationen verloren gehen. Deshalb ist es auch hier über kurz oder lang unerlässlich, mit Hilfe von Computer-Programmen (z.B. auf <http://www.M@rcoMoeller.de> die Links zu uniformen Polychora) die Objekte durch Drehung 3-dimensionaler zu machen oder auch Modelle selbst zu bauen, wenn eine tiefere Vorstellung der Objekte in vier Dimensionen erlangt werden soll.



Zentralprojektion des stumpfen 8-Zellers; die Ecken wurden jeweils durch Tetraeder, die Zellen durch stumpfe Hexaeder ersetzt.

Zentralprojektion des 4,5-Biprismachors; es besteht aus fünf Hexaedern (stehend) und vier 5-Prismen (umlaufend).



Anhang E

Sonstiges

„Wir Mathematiker haben ein wunderbar einfaches Wahrheitskriterium: Entweder es gibt einen Beweis oder nicht.“

K. Urbanik

E.1 Umformungen von Seite 16

Es sollte der Keilwinkel $(3,3,3,n)$ eines n -Antiprismas bestimmt werden. Folgende Umformungen wurden mit Hilfe der Grundregeln über trigonometrische Funktionen, der Formel von Moivre für Winkelvielfache und der Potenzformeln für die Sinus- und Kosinusfunktion nach [3] und [18] durchgeführt.

$$\begin{aligned}\gamma &= \arcsin \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cos \arcsin \frac{\csc \frac{\pi}{n} - \cot \frac{\pi}{n}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{3\pi}{2n}}{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{n}}\right)^2} \\ &= \arcsin \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cos \arcsin \frac{1 - \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{3\pi}{2n}}{3 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}\end{aligned}$$

mit $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$ folgt

$$= \arcsin \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{3\pi}{2n}}{3 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \arcsin \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} - \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{\sin^2 \frac{3\pi}{2n}}{3 \sin^2 \frac{\pi}{n}}\right)} \\
&= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} - \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}\right)^2\right) + \frac{\sin^2 \frac{3\pi}{2n}}{3 \sin^2 \frac{\pi}{n}}} \\
&= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \frac{(1 - \cos \frac{\pi}{n})^2}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} + \frac{1}{3} \frac{\sin^2 \frac{3\pi}{2n}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}} \\
&= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \left((1 - \cos \frac{\pi}{n})^2 - 4 \sin^2 \frac{3\pi}{2n}\right)} \\
&= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \left(1 - 2 \cos \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{\pi}{n} - 4 \sin^2 \frac{3\pi}{2n}\right)}
\end{aligned}$$

mit $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ folgt

$$= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \left(2 - 2 \cos \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} - 4 \sin^2 \frac{3\pi}{2n}\right)}$$

mit $1 - 2 \sin^2(x) = \cos(2x)$ folgt

$$= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \left(2 \cos \frac{3\pi}{n} - 2 \cos \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n}\right)}$$

mit $\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = -2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \sin \frac{4\pi}{2n}$ folgt

$$= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \left(4 \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n}\right)}$$

$$= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12 \sin \frac{\pi}{n}} \left(4 \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\gamma = \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12 \sin \frac{\pi}{n}} \left(4 \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{\pi}{n} \right)}$$

mit $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n}$ folgt

$$\begin{aligned} &= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12 \sin \frac{\pi}{n}} \left(8 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{\pi}{n} \right)} \\ &= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(8 \cos \frac{\pi}{n} + 1 \right)} \\ &= \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{n} + \frac{1}{12}} \\ &= \arcsin \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

E.2 Abkürzungen

Neben den Kurzschreibweisen der Polyeder (z.B. (4,4,4) für Hexaeder), die auf den Seiten 25 bis 27 aufgelistet sind, kommen im Text folgende Abkürzungen vor:

\forall	für alle
\exists	es existiert
\nexists	es existiert kein
Σ	Summe
bzw.	beziehungsweise
cos	Kosinus
cot	Kotangens ($= \frac{1}{\tan} = \frac{\cos}{\sin}$)
csc	Kosekans ($= \frac{1}{\sin}$)
d.h.	das heißt
Eckenumgeb.	Eckenumgebung
hex.	hexaedrisch
Konfig.	Konfiguration
mög.	möglich
Nr.	Nummer
o.ä.	oder ähnliches
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
sec	Sekans ($= \frac{1}{\cos}$)
sin	Sinus
tan	Tangens ($= \frac{\sin}{\cos}$)
unmög.	unmöglich
usw.	und so weiter
z.B.	zum Beispiel

E.3 Griechische und römische Zahlen

Die griechischen Zahlen treten im Zusammenhang mit den Polyedern und -chora des Öfteren auf und bilden dabei Vorsilben, die die Anzahl von Flächen oder Zellen angeben. Deshalb sollen sie hier noch einmal wiederholt werden¹²:

4	tetra	16	dekahexa
5	penta	20	ikosa
6	hexa	24	ikositetra
8	okta	48	tetrakontaokta
10	deka	120	hekatonikosa
12	dodeka	600	hexakosia

Als weitere griechische Wortteile kommen in diesem Zusammenhang *Poly-* für *Viel-*, *-gon* für *-Eck*, *-eder* für *-Flächner*, *-chor* für *-Zeller* und *-top* für *-Räumer* in dieser Arbeit vor.

Die römischen Zahlen bestehen aus Zahlzeichen: I (=1), V (=5), X (=10), L (=50), C (=100), D (=500), M (=1000). Für die Darstellung werden die Zeichen hintereinander geschrieben, wobei die Werte addiert werden, wenn die Zeichen gleich große Werte haben, oder der größere Wert zuerst kommt, und subtrahiert, wenn vor einem größeren Wert ein kleinerer steht (z.B. ist XX=20, VII=7, IX=9, XI=11, MCDLIX=1459).

¹²Die Bezeichnungen sind weder richtiges Alt- noch Neugriechisch, haben sich aber über die Zeit eingebürgert. Sie bestehen aus griechischen Wortteilen, die wie englische Zahlwörter zusammengefasst wurden (z.B. twenty-four=ikositetra und nicht wie im Altgriechischen vierundzwanzig=tetra kai ikosa).

Literaturverzeichnis

- [1] H.-J. Bartsch: *Taschenbuch mathematischer Formeln*, Fachbuchverlag Leipzig / Carl Hanser Verlag, München, 1987
- [2] A. Boole Stott: *Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings*, Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Eerste Sectie 11.1, Amsterdam, 1910
- [3] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew: *Teubner – Taschenbuch der Mathematik*, B.G. Teubner Stuttgart, Leipzig, 1996
- [4] J.H. Conway and M.J.T. Guy: *Four-Dimensional Archimedean Polytopes*, Proceedings of the Colloquium on Convexity at Copenhagen, Seite 38 u. 39, 1965
- [5] H.S.M. Coxeter: *Regular and Semi-Regular Polytopes. Part I*, Mathematische Zeitschrift, Springer, Berlin, 1940
- [6] H.S.M. Coxeter, M.S. Longuet-Higgins, and J.C.P. Miller: *Uniform Polyhedra*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, London, 1954
- [7] H.S.M. Coxeter: *Regular Polytopes*, 3rd Edition, Dover New York, 1973
- [8] H.S.M. Coxeter: *Regular and Semi-Regular Polytopes. Part II*, Mathematische Zeitschrift, Springer, Berlin, 1985
- [9] H.S.M. Coxeter: *Regular and Semi-Regular Polytopes. Part III*, Mathematische Zeitschrift, Springer, Berlin, 1988
- [10] P.R. Cromwell: *Polyhedra*, University Press, Cambridge, 1997
- [11] T. Gosset: *On the Regular and Semi-Regular Figures in Space of n Dimensions*, Messenger of Mathematics, Macmillan, 1900

- [12] B. Grünbaum: *Convex Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, 2nd Edition, Springer, New York, 2003
- [13] N.W. Johnson: *The Theory of Uniform Polytopes and Honeycombs*, Ph.D. Dissertation, University of Toronto, 1966
- [14] K. Kremer: <http://www.ginko.de/user/kremer/karsten/d/proj-3d.htm>, 17.12.2003
- [15] M. Möller: *Definitionen und Berechnungen zu den Platonischen und Archimedischen Polyedern*, Diplom-Arbeit, Universität Hamburg, 2001
- [16] M. Möller: <http://www.M@rcoMoeller.de>, 12.05.2004
- [17] G. Olshevsky: <http://www.polycell.com>, 11.05.2002
- [18] F. Reinhardt et H. Soeder: *Atlas des Mathématiques*, La Pochothèque, Encyclopédies D'aujourd'hui, Paris, 1997
- [19] L. Schläfli: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, herausgegeben vom Steiner-Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Band I, Birkhäuser Basel, 1950
- [20] V. Schlegel: *Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde*, Verhandlungen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher, Nova Acte, 1883
- [21] C.J. Scriba und P. Schreiber: *5000 Jahre Geometrie*, Springer, Berlin, 2002
- [22] L. Smolin: *Three Roads to Quantum Gravity*, Basic Books, 2001
- [23] L. Smolin: *Loop-Quantengravitation – Quanten der Raumzeit*, Titelthema, Spektrum der Wissenschaft, März 2004
- [24] L.F. Tóth: *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest, und Teubner, Leipzig, 1965
- [25] A. Weimholt: <http://www.weimholt.com>, 17.12.2003
- [26] W.A. Wythoff: *A relation between the polytopes of the C_{600} -family*, Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Sectie 20, Amsterdam, 1918

Danksagungen

Für die langjährige Zusammenarbeit, die zu dieser Arbeit geführt hat, möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Alexander Kreuzer bedanken. Ich werde die langen und intensiven Gespräche vermissen.

Außerdem möchte ich mich bei Herrn Prof. Rolfdieter Frank für den sehr produktiven Gedankenaustausch und seine Gastfreundschaft bedanken.

Des Weiteren geht mein Dank an Dr. Andrea Blunck, Dr. Wen-ling Huang, Prof. Hans-Joachim Samaga und Dr. Hubert Kiechle für das angenehme Arbeitsklima im Schwerpunkt Geometrie. Auch möchte ich Prof. Karin Reich, Prof. Bodo Werner und Prof. Stefan Kirschner für die freundliche Unterstützung dankend erwähnen.

Zum Schluss danke ich Imke Scholz für das Korrekturlesen und meine Freundin Stefanie Bahr für ihren Glauben, ihre Unterstützung und für die unendliche Geduld, es mit mir während der Endphase der Arbeit ausgehalten zu haben.

Zusammenfassung

Name Marco Möller
Titel Vierdimensionale Archimedische Polytope
Jahr der Drucklegung 2004

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es gewesen, einen Beweis dafür zu liefern, dass die Liste der bekannten 41 Archimedischen Polytope in vier Dimensionen vollständig ist. Zu diesem Zweck wird eine größere Klasse von Polytopen, die uniformen Polytope, betrachtet, von denen im Vierdimensionalen 64 bekannt sind. Diese haben unter anderem die Eigenschaft der Eckentransitivität, aus der folgt, dass alle Ecken auf einer Sphäre liegen müssen.

Die Beweisidee beruht nun darauf, dass aus der lokalen Zusammensetzung eines vierdimensionalen Polytops – hier der Kantenumgebung, also der Anordnung von uniformen Polyedern um eine Kante – ein Radius bestimmt wird, der zu einer Sphäre führt, auf der alle Ecken der beteiligten Polyeder liegen. Es werden 1000 verschiedene Kantenumgebungen gefunden und zu diesen die Radien bestimmt. Diese Kantenumgebungen werden nach Radien sortiert; dann werden sie für jeden Radius getrennt um eine Ecke herum kombiniert, so dass zu den resultierenden möglichen Eckenumgebungen eindeutig ein Radius – und damit eine Sphäre mit der zuvor genannten Eigenschaft – bestimmt werden kann.

Nach einem Ausschlussverfahren bleiben 72 Radien mit zugehörigen Kantenumgebungen übrig. Diese werden einzeln betrachtet und ausgeschlossen, wenn eine Eckenumgebung nicht widerspruchsfrei erzeugt bzw. an Nachbar-ecken nicht die gleiche Eckenumgebung hergestellt werden kann.

Als Zwischenergebnis werden 64 verschiedene Eckenumgebungen gefunden. Diese können eindeutig mit den 64 bekannten uniformen Polytopen in vier Dimensionen identifiziert werden. Im einzelnen sind dies: sechs Platonische Polytope, vier Prismatope basierend auf vier der fünf Platonischen Polyeder (der Hexaeder als Basis liefert ein schon gezähltes Platonisches Polytop), 13 Prismatope basierend auf den 13 Archimedischen Polyedern und 41 weitere Polytope. Letztere werden, da sie weder Platonisch noch Prisma-ähnlich sind, die Archimedischen Polytope genannt.

Außerdem werden noch die beiden unendlichen Klassen von Prismatopen basierend auf den Antiprismen und von Biprismatopen (verallgemeinerte Prismatope basierend auf einem p - und einem q -Prisma) identifiziert. Analoges ist von den uniformen Polyedern mit ihren unendlichen Klassen von Prismen und Antiprismen basierend auf n -Ecken bekannt.

Damit ist der Beweis erbracht, dass es in vier Dimensionen nur die bekannten 41 Archimedischen Polytope gibt.

Lebenslauf des Autors



Marco Möller

geboren am 21.11.1974 in Hamburg

Email: M@rcoMoeller.de

Homepage: <http://www.M@rcoMoeller.de>

1981 – 1994 Grundschule Kisdorf, Gymnasium Kaltenkirchen

1994 – 1996 Ausbildung zum Vulkaniseur im elterlichen Betrieb

1996 – 2001 Studium der Mathematik auf Diplom, Universität Hamburg
Diplomarbeit: „Definitionen und Berechnungen der Platonischen und Archimedischen Polyeder“

2002 – 2004 Studium der Mathematik auf Promotion, Universität Hamburg

1991 – 1992 12-monatiger Aufenthalt in Indiana, USA; Highschool-Abschluss

1998 – 1999 11-monatiger Aufenthalt in Valladolid, Spanien; Studium an der Universidad de Valladolid

2002 6-wöchiger Aufenthalt in Paris, Frankreich; Intensivsprachkurs

Neben meinem Studium habe ich im elterlichen Betrieb gearbeitet und dort Programme für die Datenverarbeitung geschrieben sowie in den Ferien die Urlaubsvertretung übernommen. Nach meinem Diplom habe ich dann zum Wintersemester 02/03 an der Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik, als Wissenschaftlicher Mitarbeiter angefangen. Meine Tätigkeiten umfassten neben dem Lehrexport zur Technischen Universität Hamburg-Harburg beratende Funktionen zu $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ und $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$ sowie das Organisieren der Arbeitsgemeinschaft Geometrie. Im Wintersemester 03/04 war ich Veranstalter der Orientierungseinheit am Fachbereich und zuständig für die Betreuung der Vitrinen und mathematischen Modelle in der Mathematik.

Während des Promotionsstudiums war ich Vortragender in der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg („Regelmäßige Polytope“, 2002), bei der Geometrie-Tagung in Berlin („Visualisierung vierdimensionaler Polytope“, 2003) und bei der Internationalen Konferenz zur Geometrie in Varna, Bulgarien („Halbregelmäßige Polychora“, 2003).

Ich bin seit 1994 Mitglied der Freiwilligen Feuerwehr. Meine weiteren Interessen sind Tanzen, Lesen, Reisen, Astronomie und Luft- und Raumfahrt.

